

TERMINALE SPÉCIALITÉ · MATHÉMATIQUES · ANALYSE · CHAPITRE 3



R. RINGUET · 2026 – 2027

Contrôle B Limites de fonctions

Vrai ou faux, indéterminations, double asymptote verticale, encadrement

Durée : 1 h · calculatrice autorisée · 4 exercices indépendants · barème sur 20

Nom : Prénom : Classe : Note : /20

★ CONSIGNES

Toute limite doit être justifiée : limites usuelles, opérations, factorisation du terme prépondérant, croissances comparées ou encadrement. Une affirmation déclarée fausse doit être réfutée par un contre-exemple explicite. La qualité de la rédaction est prise en compte dans la notation.

Exercice 1 Vrai ou faux ?

4 pts ●●○

Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse et **justifier** la réponse. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

- 1.1 Affirmation :** « si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$, alors il existe un réel M tel que, pour tout $x > M$, $f(x) > 1,9$ ».
- 1.2 Affirmation :** « si $f(x) \leq g(x)$ pour tout réel x et si $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ».
- 1.3 Affirmation :** « la courbe d'une fonction ne peut jamais couper son asymptote horizontale ».
- 1.4 Affirmation :** « pour tout entier $n \geq 1$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x^n) = +\infty$ ».

Exercice 2 Cinq indéterminations

5 pts ●●○

Déterminer les limites suivantes en détaillant la méthode utilisée.

- a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2}$
- b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^x + 3x}{e^x - x^2}$
- c) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right)$
- d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + 1) e^x$
- e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x})$ (quantité conjuguée)

Exercice 3 Un capteur de température

5 pts ●●○

La tension délivrée par un capteur, en volts, est modélisée t secondes après sa mise sous tension par $u(t) = 4 + \frac{3 \cos t}{t+1}$, pour $t \geq 0$.

- 3.1** Calculer $u(0)$. Justifier que, pour tout réel $t \geq 0$, $4 - \frac{3}{t+1} \leq u(t) \leq 4 + \frac{3}{t+1}$.
- 3.2** En déduire $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t)$ et l'équation de l'asymptote correspondante. Interpréter dans le contexte de l'exercice.
- 3.3** Le capteur est considéré comme stabilisé lorsque la tension diffère de sa valeur limite d'au plus 0,01 V. Démontrer qu'il suffit que $t \geq 299$ pour que ce soit le cas.
- 3.4** La courbe de u coupe-t-elle son asymptote horizontale ? Si oui, déterminer toutes les valeurs de $t \geq 0$ pour lesquelles cela se produit.

Exercice 4 Une courbe à deux asymptotes verticales

6 pts ●●●

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ par $f(x) = \frac{2x^2 + 1}{x^2 - 1}$. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

- 4.1** Déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$; en déduire l'équation de l'asymptote horizontale à $\mathcal{C}_f$.
- 4.2** Étudier le signe de $x^2 - 1$ sur $\mathbb{R}$, puis déterminer les quatre limites de f en -1^- , -1^+ , 1^- et 1^+ . En déduire les équations des asymptotes verticales.
- 4.3** Montrer que, pour tout réel $x \neq \pm 1$, $f(x) - 2 = \frac{3}{x^2 - 1}$, puis en déduire la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à son asymptote horizontale.
- 4.4** Montrer que, pour tout réel $x \neq \pm 1$, $f'(x) = \frac{-6x}{(x^2 - 1)^2}$, puis dresser le tableau de variations complet de f (limites comprises).
- 4.5** Calculer $f(0)$, $f(2)$ et $f(3)$, puis tracer les asymptotes en pointillés et la courbe $\mathcal{C}_f$ dans le repère ci-dessous (à rendre avec la copie).

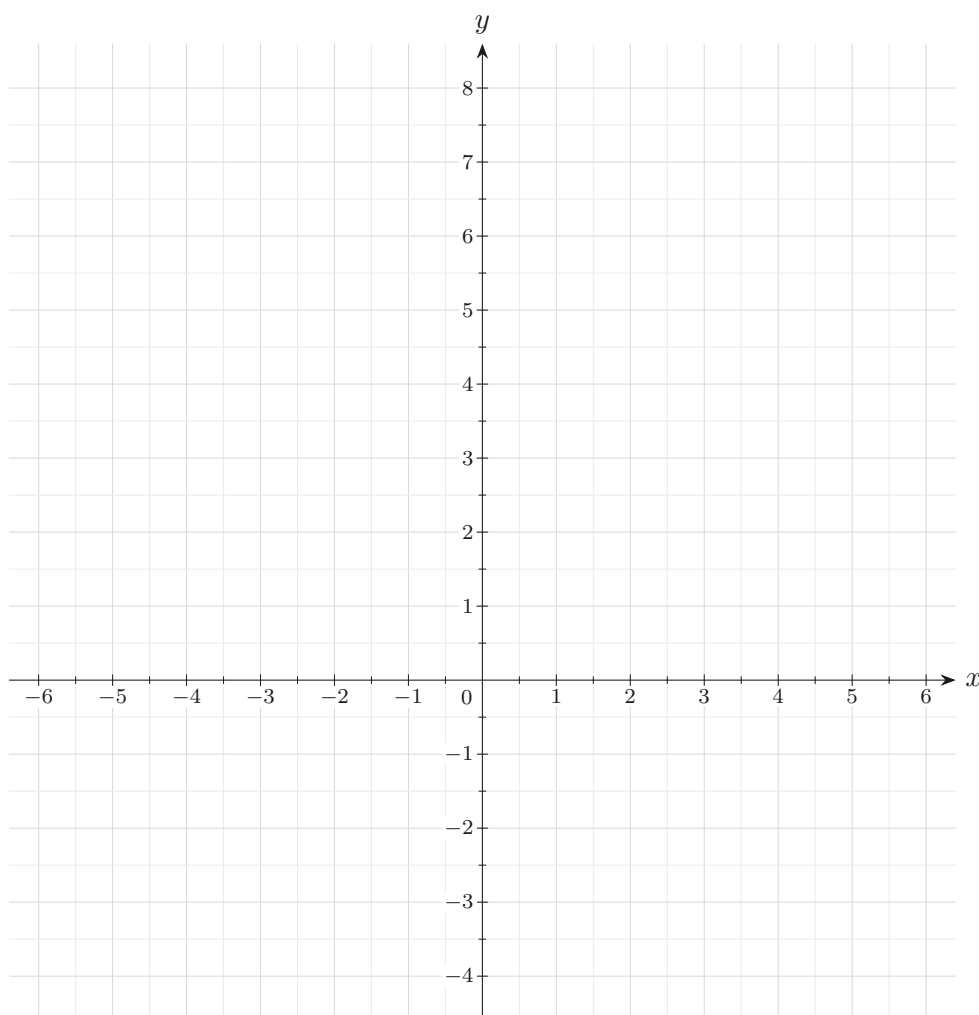


Figure 1 — Repère à compléter