

TERMINALE SPÉCIALITÉ · MATHÉMATIQUES · ANALYSE · CHAPITRE 3



R. RINGUET · 2026 – 2027

Approfondissement Limites de fonctions

Pour aller plus loin : démonstrations du cours, quantificateurs, grands classiques

6 exercices · niveau ●●● · durée conseillée : 2 h 30 · calculatrice autorisée

Exercice 1 Démonstration des croissances comparées

●●●

L'objectif est de démontrer que, pour tout entier $n \geq 1$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$.

1.1 Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = e^x - 1 - x$. Étudier les variations de φ et en déduire que, pour tout réel x , $e^x \geq 1 + x$. En particulier, $e^x > x$ pour tout réel x .

1.2 Soit ψ la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $\psi(x) = e^x - \frac{x^2}{2}$. Calculer $\psi'(x)$, justifier que $\psi'(x) > 0$ grâce à la question précédente, puis en déduire que, pour tout réel $x \geq 0$, $e^x > \frac{x^2}{2}$.

1.3 En déduire que, pour tout réel $x > 0$, $\frac{e^x}{x} > \frac{x}{2}$, puis que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.

1.4 Soit n un entier, $n \geq 1$. Vérifier que, pour tout réel $x > 0$, $\frac{e^x}{x^n} = \frac{1}{n^n} \left(\frac{e^{x/n}}{x/n} \right)^n$. En posant $X = \frac{x}{n}$, conclure.

1.5 En posant $x = -t$, démontrer que, pour tout entier $n \geq 1$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0$.

Exercice 2 Revenir à la définition d'une limite

●●●

On rappelle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ signifie : tout intervalle de la forme $[A; +\infty[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x assez grand, et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \ell$ signifie : tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs $g(x)$ pour x assez grand.

2.1 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 4x$.

a) Vérifier que, pour tout réel x , $f(x) = (x - 2)^2 - 4$.

b) Soit A un réel strictement positif. Démontrer que, pour tout réel $x \geq 2 + \sqrt{A + 4}$, on a $f(x) \geq A$. Que vient-on de démontrer ?

c) Déterminer un réel M tel que $f(x) \geq 10^6$ pour tout $x \geq M$.

2.2 Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = 3 - \frac{1}{x}$. Soit ε un réel strictement positif. Démontrer que, pour tout réel $x > \frac{1}{\varepsilon}$, $|g(x) - 3| < \varepsilon$. Conclure.

2.3 Pour une fonction h définie sur $]2; b[$ ($b > 2$), écrire avec des intervalles ce que signifie $\lim_{x \rightarrow 2^+} h(x) = -\infty$.

Exercice 3 Trois classiques avec des racines carrées

●●●

Déterminer les limites suivantes. On utilisera à chaque fois une quantité conjuguée, et l'on justifiera soigneusement les factorisations par x ou par $\sqrt{x}$.

3.1 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 3x} - x)$ (on pourra remarquer que $\sqrt{x^2} = x$ pour $x > 0$).

3.2 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$.

3.3 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x}).$

Exercice 4 Une courbe à deux asymptotes horizontales



Dans un pays, la proportion de foyers équipés d'un nouvel appareil est modélisée par $f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$, où x est le temps en années compté depuis le 1^{er} janvier 2020 ($x < 0$ avant). On étudie f sur $\mathbb{R}$; $\mathcal{C}_f$ désigne sa courbe.

- 4.1 Déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$. Montrer ensuite que, pour tout réel x , $f(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$, puis déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. En déduire que $\mathcal{C}_f$ admet deux asymptotes horizontales dont on donnera les équations.
- 4.2 Montrer que, pour tout réel x , $f'(x) = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2}$, puis dresser le tableau de variations de f (limites comprises).
- 4.3 Démontrer que, pour tout réel x , $f(x) + f(-x) = 1$. Quelle propriété géométrique de $\mathcal{C}_f$ ce résultat traduit-il?
- 4.4 Résoudre l'équation $f(x) = \frac{1}{2}$, puis justifier que, pour tout réel x , $0 < f(x) < 1$. Interpréter ces résultats dans le contexte de l'étude.

Exercice 5 Asymptote oblique (hors programme — pour aller plus loin)



Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$, de courbe $\mathcal{C}_f$. On dit que la droite d d'équation $y = ax + b$ est *asymptote oblique* à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$ lorsque $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$ (définition analogue en $-\infty$).

- 5.1 Vérifier que, pour tout réel $x \neq 1$, $f(x) = x + 1 + \frac{1}{x-1}$.
- 5.2 Déterminer les limites de f en $-\infty$, en $+\infty$, en 1^- et en 1^+ . En déduire l'équation de l'asymptote verticale à $\mathcal{C}_f$.
- 5.3 Démontrer que la droite d d'équation $y = x + 1$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$ et en $-\infty$, puis étudier la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à d .
- 5.4 Montrer que, pour tout réel $x \neq 1$, $f'(x) = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$, puis dresser le tableau de variations complet de f .
- 5.5 Tracer d , l'asymptote verticale et l'allure de $\mathcal{C}_f$ dans un repère orthonormé d'unité 1 cm, pour $x \in [-4; 5]$.

Exercice 6 La calculatrice peut tromper



Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = \frac{e^x}{x^{10}}$. Le tableau ci-contre donne quelques valeurs de g , arrondies à deux chiffres significatifs.

- 6.1 Au vu de ce tableau, quelle conjecture un élève pourrait-il faire sur $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$?
- 6.2 Déterminer la véritable limite de g en $+\infty$ et en 0^+ . La conjecture précédente est-elle correcte?
- 6.3 Montrer que, pour tout réel $x > 0$, $g'(x) = \frac{e^x(x-10)}{x^{11}}$, puis dresser le tableau de variations de g sur $]0; +\infty[$. Expliquer alors le comportement observé dans le tableau.
- 6.4 Déterminer, à la calculatrice, le plus petit entier n tel que $g(n) \geq 10^6$. Commenter.

x	$g(x)$
1	2,7
2	$7,2 \times 10^{-3}$
4	$5,2 \times 10^{-5}$
6	$6,7 \times 10^{-6}$
8	$2,8 \times 10^{-6}$
10	$2,2 \times 10^{-6}$

Tableau 1 — Valeurs de g