

TERMINALE SPÉCIALITÉ · MATHÉMATIQUES · ANALYSE · CHAPITRE 8



R. RINGUET · 2026 - 2027

Fiche de cours Fonctions sinus et cosinus

L'essentiel du chapitre en deux pages

définitions · propriétés · méthodes · à savoir par cœur

1 CERCLE TRIGONOMÉTRIQUE ET VALEURS REMARQUABLES

Définition. Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, à tout réel x on associe le point M du cercle trigonométrique (centre O , rayon 1, orienté dans le sens direct) tel que x soit une mesure en radians de l'angle orienté $(\vec{i}, \overrightarrow{OM})$. Les coordonnées de M sont $(\cos x; \sin x)$.

Propriété. Pour tout réel x : $-1 \leq \cos x \leq 1$, $-1 \leq \sin x \leq 1$ et $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

■ FORMULAIRE — valeurs remarquables et angles associés

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

- $\cos(-x) = \cos x$; $\sin(-x) = -\sin x$.
- $\cos(\pi - x) = -\cos x$; $\sin(\pi - x) = \sin x$.
- $\cos(\pi + x) = -\cos x$; $\sin(\pi + x) = -\sin x$.

2 PARITÉ, PÉRIODICITÉ, VARIATIONS

Propriété. La fonction $\cos$ est **paire**, la fonction $\sin$ est **impaire**, et toutes deux sont **2π -périodiques** : pour tout réel x , $\cos(x + 2\pi) = \cos x$ et $\sin(x + 2\pi) = \sin x$.

Remarque. Conséquences graphiques : la courbe de $\cos$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, celle de $\sin$ par rapport à l'origine ; il suffit d'étudier ces fonctions sur $[-\pi; \pi]$, puis de reproduire la courbe par les translations de vecteurs $2k\pi \vec{i}$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Propriété — variations sur $[-\pi; \pi]$. $\cos$ est croissante sur $[-\pi; 0]$ et décroissante sur $[0; \pi]$. $\sin$ est décroissante sur $[-\pi; -\frac{\pi}{2}]$, croissante sur $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$, puis décroissante sur $[\frac{\pi}{2}; \pi]$.

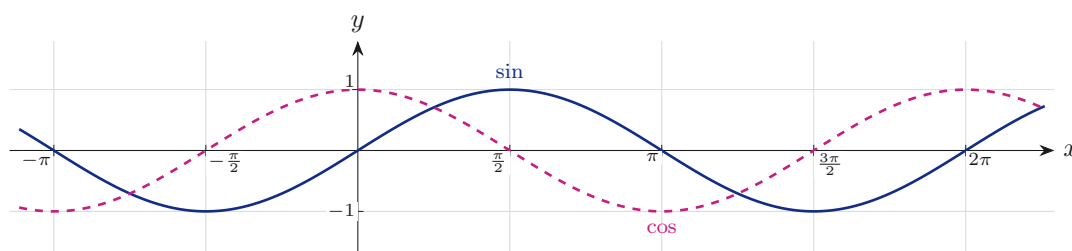


Figure 1 — Les courbes de $\sin$ (trait plein) et de $\cos$ (pointillés) : deux sinusoïdes de période 2π et d'amplitude 1.

3 DÉRIVÉES

Propriété. Les fonctions $\sin$ et $\cos$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et $\sin' = \cos$, $\cos' = -\sin$. Pour tous réels a et b :

$$(\sin(ax + b))' = a \cos(ax + b), \quad (\cos(ax + b))' = -a \sin(ax + b).$$

Remarque. On combine ces formules avec les règles du produit, du quotient et de la composée ; par exemple :

$$(e^{\cos x})' = -\sin x e^{\cos x} \quad \text{et} \quad ((\sin x)^3)' = 3 \cos x (\sin x)^2.$$

4 ÉQUATIONS ET INÉQUATIONS

Propriété. Pour tous réels x et a (avec $k \in \mathbb{Z}$) :

$$\cos x = \cos a \iff x = a + 2k\pi \text{ ou } x = -a + 2k\pi;$$

$$\sin x = \sin a \iff x = a + 2k\pi \text{ ou } x = \pi - a + 2k\pi.$$

Méthode — résoudre sur un intervalle. Écrire l'équation sous la forme $\cos x = \cos a$ (ou $\sin x = \sin a$) avec une valeur remarquable a , placer les points solutions sur le cercle, puis ne retenir que les solutions qui appartiennent à l'intervalle demandé.

Méthode — équation en $ax + b$. Poser $X = ax + b$, préciser l'intervalle décrit par X , résoudre en X , puis revenir à x .

Méthode — inéquation. Placer sur le cercle les solutions de l'équation associée, puis colorier l'arc qui convient : les points du cercle tels que $\cos x \leq a$ sont ceux situés sur ou à gauche de la droite verticale d'abscisse a .

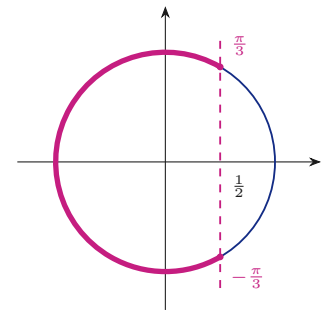


Figure 2 — Solutions de $\cos x \leq \frac{1}{2}$ sur $[-\pi; \pi]$: l'arc colorié, soit $[-\pi; -\frac{\pi}{3}] \cup [\frac{\pi}{3}; \pi]$.

5 SAVOIR-FAIRE DU CHAPITRE

► SAVOIR-FAIRE

- Donner une valeur exacte de $\cos$ ou $\sin$ en utilisant parité, périodicité et angles associés.
- Étudier la parité et la périodicité d'une fonction construite à partir de $\sin$ et $\cos$.
- Dériver $\sin(ax + b)$, $\cos(ax + b)$ et des fonctions obtenues par produit, quotient ou composée.
- Résoudre $\cos x = a$ et $\sin x = a$ dans $\mathbb{R}$ ou sur un intervalle, à l'aide du cercle trigonométrique.
- Résoudre une inéquation du type $\cos x \leq a$ sur $[-\pi; \pi]$.
- Étudier les variations d'une fonction bâtie sur $\sin$ et $\cos$ et résoudre un problème d'optimisation.

6 EXEMPLES TYPES

★ EXEMPLE — valeur exacte

$$\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}. \text{ De même } \cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = \cos \frac{3\pi}{4} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

★ EXEMPLE — dérivée

$$f(x) = x \cos(2x) \text{ sur } \mathbb{R}. \text{ C'est un produit : } f'(x) = 1 \times \cos(2x) + x \times (-2 \sin(2x)) = \cos(2x) - 2x \sin(2x).$$

★ EXEMPLE — équation sur un intervalle

Résoudre $\cos(2x) = \frac{1}{2}$ sur $[0; \pi]$. On pose $X = 2x$: quand x décrit $[0; \pi]$, X décrit $[0; 2\pi]$. Or $\cos X = \cos \frac{\pi}{3}$ donne $X = \frac{\pi}{3}$ ou $X = -\frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{5\pi}{3}$ dans $[0; 2\pi]$. Donc $x = \frac{\pi}{6}$ ou $x = \frac{5\pi}{6}$.

★ EXEMPLE — optimisation

$f(x) = 2 \sin x - x$ sur $[0; \pi]$. Alors $f'(x) = 2 \cos x - 1$, qui est strictement positive pour $\cos x > \frac{1}{2}$, c'est-à-dire sur $[0; \frac{\pi}{3}[$, nulle en $\frac{\pi}{3}$ et strictement négative sur $]\frac{\pi}{3}; \pi]$. Le maximum est donc $f(\frac{\pi}{3}) = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3} \approx 0,68$.

✖ PIÈGES

- Travailler en **radians** : la calculatrice doit être en mode radian et $\cos' = -\sin$ n'est vraie qu'en radians.
- Une équation trigonométrique a *deux* familles de solutions : ne pas oublier la seconde ($-a$ pour $\cos$, $\pi - a$ pour $\sin$), ni le $+2k\pi$.
- $(\cos(2x))' = -2 \sin(2x)$: le facteur a est indispensable.
- Ne pas confondre $(\sin x)^2$ et $\sin(x^2)$, ni $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ avec $\cos x + \sin x = 1$.
- Après un changement de variable $X = ax + b$, toujours redéfinir l'intervalle décrit par X avant de résoudre.