

TERMINALE SPÉCIALITÉ · MATHÉMATIQUES · ANALYSE · CHAPITRE 8

Exercices 2 Fonctions sinus et cosinus

Applications : étude de fonctions, phénomènes périodiques, optimisation

6 exercices · niveau ●●○ · durée conseillée : 2 h 30 · calculatrice autorisée



R. RINGUET · 2026 – 2027

★ À RETENIR — Ce qu'il faut savoir faire à la fin de la feuille

- Étudier une fonction bâtie sur $\sin$ et $\cos$: variations, extremums, tangentes, convexité, tracé.
- Exploiter un modèle périodique $t \mapsto A + B \cos(\omega t)$ (période, extremums, vitesse, seuils), résoudre une inéquation trigonométrique et modéliser un problème géométrique à l'aide d'un angle.

Exercice 1 Une étude complète

●●○

Soit f la fonction définie sur $[0; 2\pi]$ par $f(x) = \frac{x}{2} + \cos x$, de courbe $\mathcal{C}_f$.

- 1.1 Calculer $f'(x)$, résoudre $f'(x) = 0$ sur $[0; 2\pi]$, puis étudier le signe de $f'(x)$.
- 1.2 Dresser le tableau de variations de f avec les valeurs exactes de $f(0)$, $f(\frac{\pi}{6})$, $f(\frac{5\pi}{6})$, $f(2\pi)$, puis donner le maximum et le minimum de f arrondis à 10^{-2} .
- 1.3 Calculer $f''(x)$, étudier son signe, en déduire les intervalles de convexité de f et les coordonnées exactes des deux points d'inflexion de $\mathcal{C}_f$.
- 1.4 Déterminer une équation de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $\frac{\pi}{2}$, puis tracer T et l'allure de $\mathcal{C}_f$ dans le repère de la figure 1.

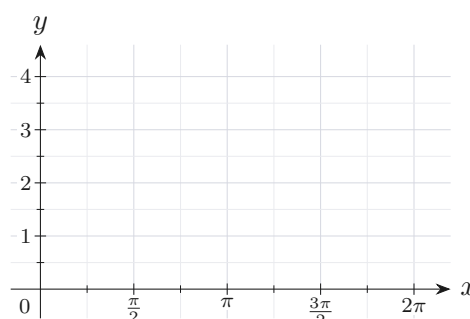


Figure 1 — Repère à compléter

Exercice 2 Températures au fil de l'année

●●○

Dans une ville du nord-est de la France, la température moyenne journalière (en °C) m mois après le 1^{er} janvier est modélisée par

$$T(m) = 11 - 8 \cos\left(\frac{\pi m}{6}\right), \quad m \in [0; 12],$$

où $m = 0$ correspond au 1^{er} janvier, $m = 1$ au 1^{er} février, etc.

- 2.1 Calculer $T(0)$, $T(3)$ et $T(6)$. Justifier que la fonction T , définie sur $\mathbb{R}$ par la même formule, est 12-périodique et expliquer pourquoi c'est attendu ici.
- 2.2 Calculer $T'(m)$, étudier son signe sur $[0; 12]$ et en déduire les dates où la température est minimale, puis maximale.
- 2.3 Résoudre sur $[0; 12]$ les inéquations $T(m) \geq 15$, puis $T(m) \leq 7$. Interpréter chacun des deux résultats.
- 2.4 La fonction `seuil` ci-contre renvoie le plus petit multiple de 0,01 en lequel la température atteint s . Compléter la ligne 8, puis donner `seuil(16)`.

```

1 from math import cos, pi
2
3 def T(m):
4     return 11 - 8*cos(pi*m/6)
5
6 def seuil(s):
7     m = 0
8     while ... :
9         m = m + 0.01
10    return round(m, 2)

```

Exercice 3 La grande roue



Une grande roue tourne à vitesse constante et fait un tour en 30 min. La hauteur du sol, en mètres, d'une nacelle N au bout de t minutes est $h(t) = 40 - 35 \cos\left(\frac{\pi t}{15}\right)$, avec $t \in [0; 30]$.

- 3.1 Calculer $h(0)$ et $h(15)$; en déduire le diamètre de la roue et la hauteur de son axe. Calculer ensuite les valeurs exactes de $h(5)$ et $h(10)$.
- 3.2 Des platanes hauts de 22,5 m bordent la roue : la vue est masquée tant que $h(t) \leq 22,5$. Résoudre cette inéquation sur $[0; 30]$ et en déduire la durée, sur un tour, où la vue est masquée.
- 3.3 Montrer que $h'(t) = \frac{7\pi}{3} \sin\left(\frac{\pi t}{15}\right)$. Que représente $h'(t)$ pour la nacelle ?
- 3.4 Déterminer l'instant du tour où la nacelle monte le plus vite et cette vitesse, arrondie à $0,01 \text{ m} \cdot \text{min}^{-1}$.

Exercice 4 Lecture graphique d'une sinusoïde



La figure 2 représente, sur $[-4; 4]$, la courbe C_g d'une fonction g définie sur $\mathbb{R}$.

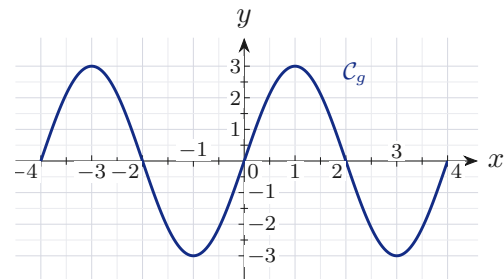


Figure 2 — Courbe de g sur $[-4; 4]$

- 4.1 Déterminer graphiquement la période de g et son maximum; la fonction g semble-t-elle paire ou impaire ?
- 4.2 Déterminer l'expression de $g(x)$ parmi les quatre propositions suivantes, en justifiant.

a) $3 \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)$	b) $3 \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$
c) $3 \sin(2\pi x)$	d) $2 \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$
- 4.3 Résoudre par le calcul l'équation $g(x) = 1,5$ sur $[0; 4]$, puis vérifier la cohérence des solutions avec la figure 2.
- 4.4 Calculer $g'(x)$, puis le coefficient directeur de la tangente à C_g en 0 (valeur exacte et arrondie à 10^{-2}).

Exercice 5 Le vitrail



Un vitrail est un demi-disque de centre O et de rayon 3 m. On y insère un panneau rectangulaire $MNPQ$ de côté $[QP]$ porté par le diamètre, M et N étant sur le demi-cercle (figure 3). On pose $\theta = \widehat{NOP}$, avec $\theta \in]0; \frac{\pi}{2}[$.

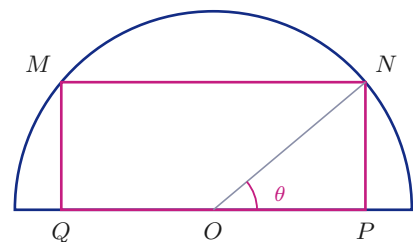


Figure 3 — Le panneau $MNPQ$

- 5.1 Justifier que $NP = 3 \sin \theta$ et $OP = 3 \cos \theta$, puis que l'aire du panneau, en m^2 , est $\mathcal{A}(\theta) = 18 \sin \theta \cos \theta$.
- 5.2 Montrer que $\mathcal{A}'(\theta) = 18 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)$, puis que $\mathcal{A}'(\theta) = 18 (1 - 2 \sin^2 \theta)$. En déduire son signe sur $]0; \frac{\pi}{2}[$ et le tableau de variations de $\mathcal{A}$.
- 5.3 Déterminer θ rendant l'aire maximale, les dimensions exactes du panneau et son aire maximale, puis des valeurs arrondies à 10^{-2} .

Exercice 6 Tension du secteur



La tension, en volts, d'une prise domestique à l'instant t (en secondes) est $u(t) = 325 \cos(100\pi t)$, pour $t \geq 0$.

- 6.1 Déterminer le maximum de u et sa plus petite période T , puis la fréquence $f = \frac{1}{T}$, en hertz.
- 6.2 Résoudre sur $[0; 0,02]$ l'équation $u(t) = 162,5$ (valeurs exactes, puis arrondies à 0,1 ms) et l'inéquation $u(t) \geq 0$.
- 6.3 Calculer $u'(t)$, puis le maximum de $|u'(t)|$ sur $[0; 0,02]$, arrondi au millier.