

TERMINALE SPÉCIALITÉ · MATHÉMATIQUES · ANALYSE · CHAPITRE 8



R. RINGUET · 2026 – 2027

Approfondissement Fonctions sinus et cosinus

Pour aller plus loin : d'où viennent les dérivées, inégalités classiques, tangente, optimisation

6 exercices · niveau ●●● · durée conseillée : 2 h 30 · calculatrice autorisée

Exercice 1 D'où vient la dérivée de sinus ? (hors programme — pour aller plus loin)

●●●

En classe, les formules $\sin' = \cos$ et $\cos' = -\sin$ sont admises. Cet exercice en établit le point de départ : le nombre dérivé en 0. On **admet** l'encadrement géométrique, obtenu en comparant des aires sur le cercle trigonométrique : $\sin h \leq h \leq \frac{\sin h}{\cos h}$ pour tout h de $]0; \frac{\pi}{2}[$.

- 1.1 En divisant cet encadrement par $\sin h > 0$, puis en passant aux inverses, montrer que $\cos h \leq \frac{\sin h}{h} \leq 1$ sur $]0; \frac{\pi}{2}[$.
- 1.2 En admettant que $\lim_{h \rightarrow 0} \cos h = 1$, en déduire $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sin h}{h}$. Justifier ensuite que $h \mapsto \frac{\sin h}{h}$ est paire, puis donner $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h}$.
- 1.3 Que vient-on de démontrer à propos de la fonction sinus en 0 ? Donner une équation de la tangente à sa courbe au point d'abscisse 0.
- 1.4 Montrer que $\frac{\cos h - 1}{h} = -\frac{\sin h}{h} \times \frac{\sin h}{1 + \cos h}$ pour tout réel h non nul de $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ (utiliser $\cos^2 h + \sin^2 h = 1$), puis en déduire $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h}$ et le nombre dérivé de cosinus en 0.

Exercice 2 Deux inégalités classiques

●●●

- 2.1 Soit $g(x) = x - \sin x$ sur $[0; +\infty[$. Calculer $g'(x)$, déterminer son signe et en déduire que $\sin x \leq x$ pour $x \geq 0$. Montrer de même que $-x \leq \sin x$ pour $x \geq 0$, puis en déduire, par imparité, que $|\sin x| \leq |x|$ pour tout réel x .
- 2.2 Soit $k(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{6}$ sur $[0; +\infty[$. Calculer $k'(x)$ et $k''(x)$, puis montrer à l'aide de 2.1 que $k''(x) \geq 0$ pour $x \geq 0$.
- 2.3 En déduire successivement le sens de variation de k' , le signe de k' , puis celui de k . Conclure que, pour tout $x \geq 0$, $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$.
- 2.4 En déduire un encadrement de $\sin(0,2)$ d'amplitude inférieure à 2×10^{-3} , puis comparer avec la valeur affichée par la calculatrice.

Exercice 3 La fonction tangente (hors programme — pour aller plus loin)

●●●

On définit la fonction tangente sur $I =]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ par $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$.

- 3.1 Justifier que $\tan$ est bien définie et dérivable sur I , et qu'elle y est impaire.
- 3.2 Montrer que, pour tout x de I , $\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$. En déduire le sens de variation de $\tan$ sur I .
- 3.3 Déterminer $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} \tan x$ et $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan x$, puis interpréter graphiquement ces deux limites.
- 3.4 Calculer $\tan \frac{\pi}{6}$, $\tan \frac{\pi}{4}$, $\tan \frac{\pi}{3}$, résoudre sur I les équations $\tan x = 1$ et $\tan x = \sqrt{3}$, puis justifier que $\tan x = a$ a une unique solution dans I pour tout réel a .

Exercice 4 La barre dans le couloir (utilise la fonction tangente, hors programme)



Deux couloirs horizontaux de largeurs 2 m et 1 m se rejoignent à angle droit (figure 1). On y fait passer une barre rigide maintenue horizontale; la position la plus contraignante est celle où elle touche le coin intérieur K et les deux murs extérieurs. On note $\theta \in]0; \frac{\pi}{2}[$ l'angle qu'elle forme avec le mur du couloir large et $L(\theta)$ sa longueur, en mètres.

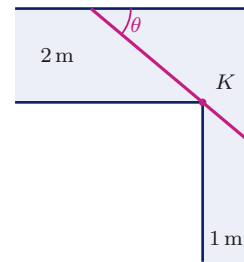


Figure 1 — Vue de dessus

- 4.1 Justifier que $L(\theta) = \frac{2}{\sin \theta} + \frac{1}{\cos \theta}$.
- 4.2 Montrer que $L'(\theta) = \frac{\sin^3 \theta - 2 \cos^3 \theta}{\sin^2 \theta \cos^2 \theta}$, puis que $L'(\theta)$ est du signe de $\tan^3 \theta - 2$ (voir l'exercice 3).
- 4.3 Justifier qu'il existe un unique réel θ_0 de $]0; \frac{\pi}{2}[$ tel que $\tan \theta_0 = \sqrt[3]{2}$, et donner sa valeur arrondie à 10^{-3} (calculatrice en radians).
- 4.4 Dresser le tableau de variations de L sur $]0; \frac{\pi}{2}[$ et en déduire la longueur maximale, arrondie au centimètre, d'une barre pouvant passer d'un couloir à l'autre.

Exercice 5 Un oscillateur amorti



Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = e^{-x} \sin x$, de courbe $\mathcal{C}_f$. Elle modélise l'élongation d'un pendule freiné par les frottements.

- 5.1 Montrer que $f'(x) = e^{-x} (\cos x - \sin x)$, puis, à l'aide du cercle trigonométrique, résoudre $\cos x = \sin x$ sur $[0; 2\pi]$.
- 5.2 En déduire le signe de $f'(x)$ et le tableau de variations de f sur $[0; 2\pi]$; donner les valeurs exactes puis arrondies à 10^{-3} des deux extremums locaux.
- 5.3 Montrer que $f''(x) = -2e^{-x} \cos x$, puis déterminer les intervalles de convexité de f et les abscisses des points d'inflexion de $\mathcal{C}_f$ sur $[0; 2\pi]$.
- 5.4 Justifier que $-e^{-x} \leq f(x) \leq e^{-x}$ pour $x \geq 0$, en déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et interpréter physiquement.
- 5.5 Déterminer les abscisses des points où $\mathcal{C}_f$ touche la courbe d'équation $y = e^{-x}$; la tangente y est-elle horizontale?

Exercice 6 L'équation $\cos x = x$



Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = \cos x - x$.

- 6.1 Calculer $\varphi'(x)$ et démontrer que φ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
- 6.2 Calculer $\varphi(0)$ et $\varphi(1)$ (valeur arrondie à 10^{-3}), puis démontrer que l'équation $\cos x = x$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$, et que $\alpha \in]0; 1[$.
- 6.3 La fonction `dicho` ci-contre renvoie un encadrement de α d'amplitude au plus e . Compléter les lignes 9 et 11 en justifiant à l'aide du sens de variation de φ , puis donner l'encadrement fourni par `dicho(0.001)`.
- 6.4 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \cos(u_n)$. Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4 , arrondis à 10^{-3} . On admet que (u_n) converge; démontrer, à l'aide de la continuité de la fonction cosinus, que sa limite est α .

```

1  from math import cos
2  def phi(x):
3      return cos(x) - x
4  def dicho(e):
5      a, b = 0, 1
6      while b - a > e:
7          m = (a + b)/2
8          if phi(m) > 0:
9              a = ...
10         else:
11             b = ...
12     return a, b

```