

TERMINALE SPÉCIALITÉ · MATHÉMATIQUES · ANALYSE · CHAPITRE 7



R. RINGUET · 2026 – 2027

Sujet type bac

Fonction logarithme népérien

Étude d'une fonction avec logarithme en contexte, convexité, aire approchée — QCM

Durée : 1 h 30 · calculatrice autorisée · 2 exercices indépendants · barème sur 12

Nom : Prénom : Classe : Note : **/ 12**

★ CONSIGNES

Deux exercices indépendants, notés comme à l'épreuve écrite du baccalauréat (5 points et 7 points). La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements sont prises en compte. Toute limite doit être justifiée et tout calcul de dérivée détaillé.

Exercice 1 Questionnaire à choix multiples

5 pts ●●○

Pour chacune des cinq questions suivantes, **une seule** des quatre réponses proposées est exacte. Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte un point ; une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

- 1.1** La limite $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln x$ est égale à :
- a) $-\infty$ b) 0 c) 1 d) $+\infty$
- 1.2** L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $e^{2x} - 5e^x + 6 = 0$ est :
- a) $\{2; 3\}$ b) $\{\ln 2; \ln 3\}$ c) $\{\ln 5; \ln 6\}$ d) $\emptyset$
- 1.3** La fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \ln(x^2 + 1)$ est convexe sur :
- a) $\mathbb{R}$ b) $[-1; 1]$ c) $[0; +\infty[$ d) $] -\infty; -1]$
- 1.4** Le plus petit entier naturel n tel que $1,05^n \geq 3$ est :
- a) 21 b) 22 c) 23 d) 24
- 1.5** Une équation de la tangente à la courbe de la fonction $\ln$ au point d'abscisse 2 est :
- a) $y = \frac{x}{2} + \ln 2$ b) $y = \frac{x}{2} - 1 + \ln 2$
- c) $y = 2x - 2 + \ln 2$ d) $y = \frac{x}{2} - 1$

Exercice 2 Le succès d'une vidéo

7 pts ●●○

Une vidéo est mise en ligne sur une plateforme. Le nombre de visiteurs qu'elle attire chaque jour, exprimé en milliers, est modélisé t jours après sa mise en ligne par $N(t) = f(t + 1)$, où f est la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{20 \ln x}{x}.$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal.

Partie A — Étude de la fonction f

- 2.1** Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, puis $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ en utilisant une croissance comparée. En déduire les équations des deux asymptotes à $\mathcal{C}$.
- 2.2** Résoudre l'équation $f(x) = 0$ et en déduire le signe de $f(x)$ sur $]0; +\infty[$.

- 2.3** Montrer que, pour tout $x > 0$, $f'(x) = \frac{20(1 - \ln x)}{x^2}$, puis étudier son signe et dresser le tableau de variations complet de f sur $]0; +\infty[$ (limites comprises). On donnera la valeur exacte du maximum de f , puis son arrondi à 10^{-2} .
- 2.4** Déterminer une équation de la tangente T à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1.
- 2.5** Montrer que, pour tout $x > 0$, $f''(x) = \frac{20(2 \ln x - 3)}{x^3}$. Étudier son signe, en déduire les intervalles de convexité de f et démontrer que $\mathcal{C}$ admet un unique point d'inflexion, dont on donnera l'abscisse exacte puis son arrondi à 10^{-2} .

Partie B — Retour au contexte

La figure 1 représente la courbe de N sur $[0; 12]$ ainsi que la droite Δ d'équation $y = 5$.

- 2.6** Calculer $N(0)$ et $N(1)$ (arrondi à 10^{-2}) et interpréter ces deux valeurs dans le contexte.
- 2.7** Déduire de la partie A l'instant t où le nombre quotidien de visiteurs est maximal (valeur exacte, puis arrondi à 10^{-2}), ainsi que ce nombre maximal de visiteurs par jour, arrondi à l'unité.
- 2.8** Déterminer $\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t)$ et interpréter ce résultat. Ce modèle vous paraît-il réaliste à très long terme ?
- 2.9** La vidéo est dite *virale* tant qu'elle attire au moins 5 000 visiteurs par jour.
- Par lecture graphique, donner un encadrement d'amplitude 1 de chacun des deux instants où $N(t) = 5$.
 - Démontrer que l'équation $N(t) = 5$ admet exactement deux solutions sur $[0; 12]$, puis déterminer chacune d'elles à 10^{-2} près par balayage. En déduire la durée de la période virale, arrondie à 10^{-1} .
- 2.10** Interpréter, dans le contexte, l'abscisse du point d'inflexion obtenue à la question 2.5.

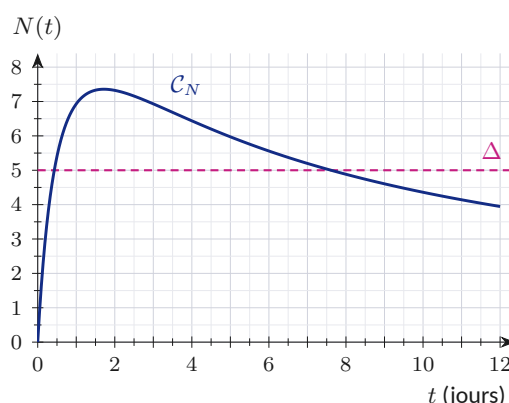


Figure 1 — Nombre quotidien de visiteurs $N(t)$, en milliers

Partie C — Nombre total de visiteurs

On admet que le nombre total de visiteurs, en milliers, attirés par la vidéo pendant les dix premiers jours est égal à l'aire du domaine compris entre la courbe de N , l'axe des abscisses et les droites d'équations $t = 0$ et $t = 10$, l'unité d'aire étant celle du repère. Le tableau 1 donne quelques valeurs de N , arrondies à 10^{-2} .

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$N(t)$	0	6,93	7,32	6,93	6,44	5,97	5,56	5,20	4,88	4,61	4,36

Tableau 1 — Valeurs de $N(t)$ pour t entier de 0 à 10

- 2.11** En découpant le domaine en dix trapèzes de largeur 1, donner une estimation du nombre total de visiteurs des dix premiers jours (arrondir au millier). On rappelle que l'aire d'un trapèze de bases b et B et de hauteur h vaut $\frac{(b+B)h}{2}$.
- 2.12** La fonction aire ci-contre estime la même aire par la méthode des rectangles, avec un pas h . Recopier et compléter les lignes 9 et 10, puis indiquer laquelle des deux estimations, `aire(1)` ou `aire(0.01)`, est la plus fiable, en justifiant.

```

1  from math import log
2
3  def N(t):
4      return 20*log(t+1)/(t+1)
5
6  def aire(h):
7      s, t = 0, 0
8      for k in range(round(10 / h)):
9          s = ...
10         t = ...
11     return s

```