

TERMINALE SPÉCIALITÉ · MATHÉMATIQUES · ANALYSE · CHAPITRE 7



R. RINGUET · 2026 – 2027

Exercices 1

Fonction logarithme népérien

Les bases : $\ln$ et $\exp$, propriétés algébriques, équations, dérivée, limites

7 exercices · niveau ●○○ à ●●○ · durée conseillée : 2 h · calculatrice autorisée

★ À RETENIR — Ce qu'il faut savoir faire à la fin de la feuille

- Utiliser les égalités $\ln(e^x) = x$ et $e^{\ln x} = x$; transformer une écriture à l'aide des propriétés algébriques du logarithme.
- Résoudre une équation ou une inéquation faisant intervenir $\ln$ ou $\exp$ (y compris un seuil $q^n \leq A$); dériver une fonction du type $\ln u$; déterminer une limite, y compris par croissances comparées.

■ RAPPEL — Le formulaire du chapitre

- **Définition.** $\ln$ est la réciproque de $\exp$: définie sur $]0; +\infty[$, elle vérifie, pour $x > 0$ et $y \in \mathbb{R}$, $y = \ln x \iff x = e^y$. Ainsi $\ln(e^y) = y$ pour tout $y \in \mathbb{R}$ et $e^{\ln x} = x$ pour tout $x > 0$; $\ln 1 = 0$ et $\ln e = 1$.
- **Propriétés algébriques.** Pour $a > 0$, $b > 0$ et $n \in \mathbb{Z}$: $\ln(ab) = \ln a + \ln b$; $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$; $\ln \frac{1}{b} = -\ln b$; $\ln(a^n) = n \ln a$; $\ln \sqrt{a} = \frac{1}{2} \ln a$.
- **Variations.** $(\ln)'(x) = \frac{1}{x} > 0$ sur $]0; +\infty[$: $\ln$ est *strictement croissante*. Pour $a > 0$, $b > 0$: $\ln a = \ln b \iff a = b$ et $\ln a < \ln b \iff a < b$. Si u est dérivable et strictement positive sur I , $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$.
- **Limites.** $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$. **Croissances comparées** : pour tout entier $n \geq 1$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln x = 0$.

Exercice 1 Deux fonctions réciproques

●○○

1.1 Calculer, sans calculatrice, les nombres suivants.

- a) $\ln 1$ b) $\ln e$ c) $\ln(e^4)$ d) $\ln \frac{1}{e^2}$ e) $\ln \sqrt{e}$ f) $\ln(e^{-3})$

1.2 Simplifier les écritures suivantes, en précisant pour quelles valeurs de x elles ont un sens.

- a) $e^{\ln 5}$ b) $\ln(e^{2x-1})$ c) $e^{\ln(x^2+1)}$
 d) $e^{-\ln 4}$ e) $\ln(e^x) + e^{\ln x}$ f) $e^{2 \ln 3}$

Exercice 2 Transformer une écriture

●○○

2.1 Écrire chaque nombre sous la forme la plus simple possible : un entier, $\ln a$ (a entier) ou $k \ln a$ (k rationnel, a entier le plus petit possible).

- a) $A = \ln 15 - \ln 5$ b) $B = \ln 2 + \ln 50$ c) $C = 3 \ln 2 - \ln 4$
 d) $D = \ln \sqrt{8} + \frac{1}{2} \ln 2$ e) $E = \ln \frac{1}{27} + 3 \ln 3$ f) $F = \ln(e^2 \times 5) - \ln 5$

2.2 On donne $\ln 2 \approx 0,6931$ et $\ln 3 \approx 1,0986$. Exprimer chacun des nombres suivants en fonction de $\ln 2$ et de $\ln 3$, puis en donner une valeur approchée à 10^{-2} près.

- a) $\ln 6$ b) $\ln 12$ c) $\ln \frac{8}{3}$ d) $\ln 72$ e) $\ln \frac{1}{18}$ f) $\ln \sqrt{24}$

Exercice 3 Équations

●○○

Résoudre dans $\mathbb{R}$, en précisant à chaque fois l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles l'équation a un sens.

- a) $\ln(3x - 2) = 1$ b) $e^{2x} = 7$ c) $e^{-0,5x+1} = 2$
 d) $\ln x + \ln(x + 3) = \ln 10$ e) $2 \ln x = \ln(x + 6)$ f) $\ln(2x + 1) = \ln(x + 4)$

Exercice 4 Inéquations et seuils

●●○

4.1 Résoudre dans $\mathbb{R}$; donner l'ensemble des solutions sous forme d'intervalle.

- a) $\ln x \leq 3$ b) $\ln(2x - 5) > 0$ c) $e^{3x} < 2$

4.2 Une population de bactéries est divisée par 1,25 chaque heure : après n heures, il en reste la proportion $0,8^n$ de la population initiale. Déterminer *par le calcul* le plus petit entier n tel que $0,8^n \leq 0,01$.

4.3 Un capital placé au taux annuel de 4 % est multiplié par $1,04^n$ en n années. Déterminer *par le calcul* le plus petit entier n tel que $1,04^n \geq 2$.

Exercice 5 Dériver, puis calculer des limites

●●○

5.1 Déterminer la fonction dérivée de chaque fonction sur l'intervalle défini par la condition indiquée.

- a) $f(x) = \ln(3x + 1)$, $x > -\frac{1}{3}$ b) $g(x) = \ln(x^2 + 1)$, $x \in \mathbb{R}$ c) $h(x) = x \ln x$, $x > 0$
 d) $k(x) = (\ln x)^2$, $x > 0$ e) $m(x) = \frac{\ln x}{x}$, $x > 0$ f) $p(x) = 5 + 2 \ln(4 - x)$, $x < 4$

5.2 Déterminer les limites suivantes en indiquant la méthode utilisée (limites usuelles, opérations, croissances comparées).

- a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (3 + 2 \ln x)$ b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^3}$ c) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln x$
 d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x - x)$ e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \ln x}{x}$ f) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x}$

Exercice 6 Deux courbes symétriques

●●○

La figure 1 représente, dans un repère orthonormé, les courbes $\mathcal{C}$ de $\exp$ et Γ de $\ln$, et la droite Δ d'équation $y = x$.

- 6.1 Justifier que $\mathcal{C}$ et Γ sont symétriques par rapport à Δ : si $M(a; b)$ appartient à $\mathcal{C}$, montrer que $M'(b; a)$ appartient à Γ .
 6.2 Par lecture graphique, donner une valeur approchée de $\ln 2$ et de $\ln 3$, puis résoudre graphiquement l'inéquation $\ln x \leq 1$.
 6.3 Déterminer une équation de la tangente à Γ au point d'abscisse 1, puis de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0. Que constate-t-on ? Tracer ces deux tangentes sur la figure.

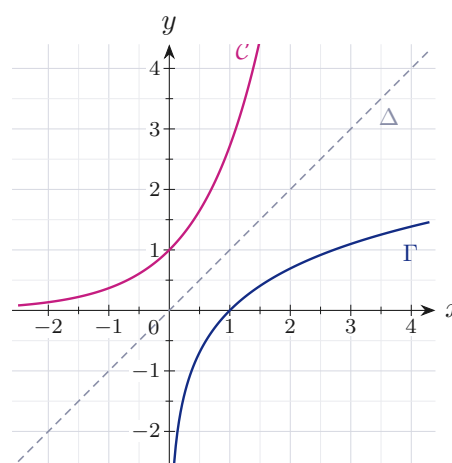


Figure 1 — Les courbes de $\exp$ et de $\ln$

Exercice 7 Une première étude de fonction

●●○

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x - 2 \ln x$.

- 7.1 Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et l'asymptote correspondante; en écrivant $f(x) = x \left(1 - \frac{2 \ln x}{x}\right)$, déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
 7.2 Montrer que $f'(x) = \frac{x-2}{x}$, dresser le tableau de variations complet de f (limites comprises, minimum exact puis arrondi à 10^{-2}), puis en déduire que $2 \ln x \leq x$ pour tout $x > 0$.