

TERMINALE SPÉCIALITÉ · MATHÉMATIQUES · ANALYSE · CHAPITRE 7



R. RINGUET · 2026 – 2027

Contrôle B

Fonction logarithme népérien

Vrai ou faux, changement de variable, étude complète avec convexité, suite et seuil

Durée : 1 h · calculatrice autorisée · 4 exercices indépendants · barème sur 20

Nom : Prénom : Classe : Note : /20

★ CONSIGNES

Une affirmation déclarée fausse doit être réfutée par un contre-exemple explicite ou par un calcul complet. Toute résolution d'équation ou d'inéquation commence par la détermination de l'ensemble des valeurs pour lesquelles elle a un sens. Les tableaux de variations doivent être complets (bornes, limites, flèches). La qualité de la rédaction est prise en compte dans la notation.

Exercice 1 Vrai ou faux ?

4 pts ●●○

Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse et **justifier** la réponse. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

- 1.1 **Affirmation** : « pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$, $\ln(a + b) = \ln a + \ln b$ ».
- 1.2 **Affirmation** : « l'équation $\ln x + \ln(x - 3) = \ln 4$ admet exactement deux solutions ».
- 1.3 **Affirmation** : « pour tout réel x non nul, $\ln(x^2) = 2 \ln x$ ».
- 1.4 **Affirmation** : « la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = x \ln x$ est convexe sur $]0; +\infty[$ ».

Exercice 2 Équations et inéquations

4 pts ●●○

- 2.1 Résoudre dans $]0; +\infty[$ l'équation $(\ln x)^2 - \ln x - 6 = 0$ (on posera $X = \ln x$). Donner les valeurs exactes, puis leurs arrondis à 10^{-3} .
- 2.2 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2e^{2x} - 5e^x + 2 = 0$. Donner les valeurs exactes des solutions et vérifier qu'elles sont opposées.
- 2.3 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\ln(2x - 1) \leq \ln(x + 3)$.
- 2.4 Déterminer, par le calcul, le plus petit entier naturel n tel que $3^n \geq 10^6$.

Exercice 3 Étude complète d'une fonction

7 pts ●●●

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x \ln x - 2x$, de courbe représentative $\mathcal{C}_f$.

- 3.1 On rappelle que $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$. En déduire $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.
- 3.2 Montrer que $f(x) = x(\ln x - 2)$ pour tout $x > 0$, puis en déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ainsi que le signe de $f(x)$ sur $]0; +\infty[$.
- 3.3 Montrer que, pour tout $x > 0$, $f'(x) = \ln x - 1$, puis dresser le tableau de variations complet de f sur $]0; +\infty[$ (limites comprises). On donnera la valeur exacte du minimum de f ainsi que son arrondi à 10^{-2} .
- 3.4 Déterminer une équation de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1.
- 3.5 Calculer $f''(x)$ et en déduire la convexité de f sur $]0; +\infty[$. Quelle position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à T peut-on en déduire ? Écrire l'inégalité correspondante, valable pour tout $x > 0$.

- 3.6** Démontrer que l'équation $f(x) = -1$ admet exactement deux solutions sur $]0; +\infty[$, puis donner un encadrement d'amplitude 0,1 de chacune d'elles par balayage.
- 3.7** Calculer $f(0,5)$, $f(3)$, $f(5)$, $f(8)$ et $f(10)$, arrondis à 10^{-2} , puis tracer T et l'allure de $\mathcal{C}_f$ dans le repère ci-dessous (à rendre avec la copie).

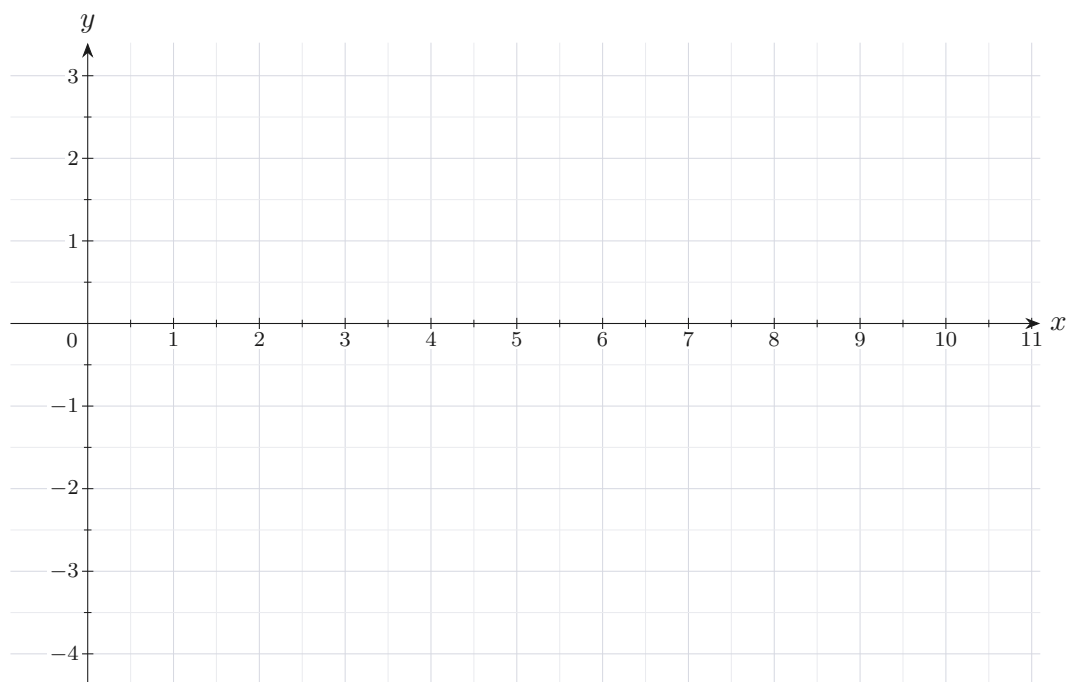


Figure 1 — Repère à compléter

Exercice 4 La dépollution d'un lac

5 pts ●●●

Un lac contient aujourd'hui 5 000 kg d'un polluant. Chaque année, 20 % du polluant présent est éliminé naturellement, mais une usine riveraine en rejette 200 kg supplémentaires. On note p_n la masse de polluant, en kilogrammes, au bout de n années; ainsi $p_0 = 5000$ et, pour tout entier $n \geq 0$, $p_{n+1} = 0,8 p_n + 200$.

- 4.1** Calculer p_1 et p_2 .
- 4.2** On pose $q_n = p_n - 1000$ pour tout entier $n \geq 0$. Démontrer que (q_n) est géométrique de raison 0,8, puis en déduire que $p_n = 1000 + 4000 \times 0,8^n$.
- 4.3** Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$ et interpréter ce résultat dans le contexte.
- 4.4** La norme en vigueur impose une masse de polluant strictement inférieure à 1 200 kg. Déterminer *par le calcul* le plus petit entier n pour lequel la norme est respectée.
- 4.5** L'usine s'engage à ne rejeter que 100 kg par an à partir d'aujourd'hui, le reste du modèle étant inchangé. Déterminer la nouvelle limite de la masse de polluant, puis, par le calcul, le plus petit entier n pour lequel la norme est alors respectée.