

TERMINALE SPÉCIALITÉ · MATHÉMATIQUES · ANALYSE · CHAPITRE 7



R. RINGUET · 2026 – 2027

Contrôle A

Fonction logarithme népérien

Propriétés algébriques, équations, dérivée et variations, décroissance exponentielle

Durée : 1 h · calculatrice autorisée · 4 exercices indépendants · barème sur 20

Nom : Prénom : Classe : Note : /20

★ CONSIGNES

Toute résolution d'équation ou d'inéquation doit commencer par la détermination de l'ensemble des valeurs pour lesquelles elle a un sens. Les calculs de dérivée doivent être justifiés (formule utilisée, fonction u choisie). Les tableaux de variations doivent être complets : bornes, limites, flèches. Les réponses du QCM ne demandent aucune justification. La qualité de la rédaction est prise en compte dans la notation.

Exercice 1 Questionnaire à choix multiples

5 pts ●○○○

Pour chacune des cinq questions, **une seule** des quatre réponses proposées est exacte. Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte un point; une réponse fausse ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

1.1 Le nombre $\ln(e^3) - \ln\left(\frac{1}{e}\right)$ est égal à :

- a) 2 b) 3 c) 4 d) e^4

1.2 La dérivée de la fonction f définie sur $] -1,5 ; +\infty[$ par $f(x) = \ln(2x + 3)$ est la fonction :

- a) $x \mapsto \frac{1}{2x+3}$ b) $x \mapsto \frac{2}{2x+3}$ c) $x \mapsto 2\ln(2x+3)$ d) $x \mapsto \frac{1}{(2x+3)^2}$

1.3 La limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2}$ est égale à :

- a) $+\infty$ b) 1 c) 0 d) $-\infty$

1.4 L'ensemble des solutions de l'inéquation $\ln(x-1) \leq 0$ est :

- a) $] -\infty ; 2]$ b) $] 1 ; 2]$ c) $[2 ; +\infty[$ d) $] 0 ; 2]$

1.5 Le plus petit entier naturel n tel que $0,9^n \leq 0,2$ est :

- a) 14 b) 15 c) 16 d) 17

Exercice 2 Calculer et résoudre

5 pts ●○○○

2.1 Démontrer que $A = \ln 18 - 2 \ln 3 + \ln\left(\frac{1}{2}\right) = 0$.

2.2 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^{2x} - 3e^x - 4 = 0$ (on posera $X = e^x$). Donner la valeur exacte puis l'arrondi à 10^{-3} de la solution.

2.3 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\ln(x+2) + \ln(x-1) = \ln 4$.

2.4 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $2 \ln x - 3 > 0$, puis l'inéquation $e^{-0,4x} < 0,05$ (arrondir la borne à 10^{-2}).

Exercice 3 Étude d'une fonction

6 pts ●●○

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1 + \ln x}{x}$. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

- 3.1** Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, puis $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ (on écrira $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x}$). En déduire les équations des deux asymptotes à $\mathcal{C}_f$.
- 3.2** Montrer que, pour tout $x > 0$, $f'(x) = \frac{-\ln x}{x^2}$, puis étudier son signe et dresser le tableau de variations complet de f (limites comprises). Préciser la valeur exacte du maximum de f .
- 3.3** Résoudre l'équation $f(x) = 0$, puis en déduire le signe de $f(x)$ sur $]0; +\infty[$.
- 3.4** Justifier que la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1 est horizontale et donner son équation.
- 3.5** Calculer $f(0,5)$, $f(2)$, $f(4)$ et $f(6)$, arrondis à 10^{-2} , puis tracer les asymptotes en pointillés et l'allure de $\mathcal{C}_f$ dans le repère ci-dessous (à rendre avec la copie).

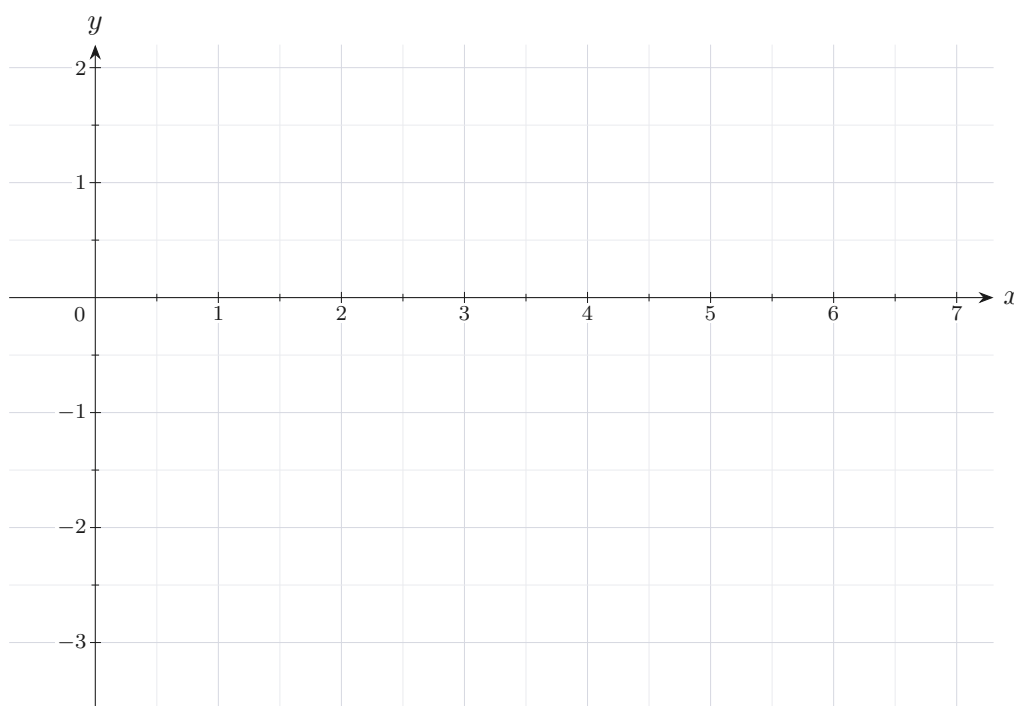


Figure 1 — Repère à compléter

Exercice 4 L'élimination d'un médicament

4 pts ●●○

Après l'injection d'une dose, la quantité de médicament présente dans le sang d'un patient, en milligrammes, t heures après l'injection, est modélisée par $q(t) = 250 e^{-0,25t}$, pour $t \geq 0$.

- 4.1** Calculer $q(0)$ et $q(4)$ (arrondi à 10^{-1}), puis justifier que q est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$.
- 4.2** Le médicament est actif tant que la quantité présente dans le sang est supérieure ou égale à 60 mg. Résoudre par le calcul l'inéquation $q(t) \geq 60$ et en déduire la durée d'efficacité de l'injection, arrondie à 10^{-1} près.
- 4.3** On appelle *demi-vie* la durée au bout de laquelle la quantité présente a été divisée par deux. Déterminer la valeur exacte de la demi-vie, puis son arrondi à 10^{-2} .
- 4.4** Déterminer, par le calcul, au bout de combien d'heures il reste moins de 1 % de la dose injectée (arrondir à 10^{-1}).