

TERMINALE SPÉCIALITÉ · MATHÉMATIQUES · ANALYSE · CHAPITRE 7



R. RINGUET · 2026 – 2027

Approfondissement

Fonction logarithme népérien

Pour aller plus loin : démonstrations du cours, inégalités de convexité, algorithme de Briggs

6 exercices · niveau ●●● · durée conseillée : 2 h 30 · calculatrice autorisée

Exercice 1 Les démonstrations du cours

●●●

On admet que la fonction $\ln$ est dérivable sur $]0; +\infty[$ et l'on rappelle la croissance comparée $\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{X}{e^X} = 0$, établie au chapitre 3.

- 1.1 En dérivant les deux membres de l'égalité $e^{\ln x} = x$, valable pour tout $x > 0$, démontrer que $(\ln)'(x) = \frac{1}{x}$.
- 1.2 Soit $x \in]0; 1[$. On pose $X = -\ln x$, donc $x = e^{-X}$. Justifier que $X \rightarrow +\infty$ quand $x \rightarrow 0^+$, puis que $x \ln x = -\frac{X}{e^X}$; en déduire $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$.
- 1.3 En posant cette fois $X = \ln x$ pour $x > 1$, démontrer de même que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.
- 1.4 Soit $n \geq 1$. En écrivant $\frac{\ln x}{x^n} = \frac{\ln x}{x} \times \frac{1}{x^{n-1}}$ et $x^n \ln x = x^{n-1} \times (x \ln x)$, démontrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln x = 0$.

Exercice 2 L'inégalité $\ln x \leq x - 1$ et ses conséquences

●●●

- 2.1 Soit $h(x) = x - 1 - \ln x$ sur $]0; +\infty[$. Étudier les variations de h , puis en déduire que $\ln x \leq x - 1$ pour tout $x > 0$, l'égalité n'ayant lieu que pour $x = 1$.
- 2.2 Retrouver cette inégalité à l'aide de la convexité : montrer que $\ln$ est concave sur $]0; +\infty[$, puis déterminer une équation de la tangente à sa courbe au point d'abscisse 1 et conclure.
- 2.3 En appliquant l'inégalité de la question 2.1 au réel $\frac{1}{x}$, démontrer que $\ln x \geq 1 - \frac{1}{x}$ pour tout $x > 0$, puis que $1 - \frac{1}{x} \leq \ln x \leq x - 1$. Interpréter graphiquement cet encadrement et en déduire un encadrement de $\ln(1,1)$ d'amplitude inférieure à 10^{-2} .
- 2.4 Soient $a > 0$ et $b > 0$. En utilisant la concavité de $\ln$ (courbe au-dessus de ses cordes), démontrer que $\ln\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \frac{\ln a + \ln b}{2}$, puis en déduire que $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$.

Exercice 3 La loi de Benford (hors programme — pour aller plus loin)

●●●

Dans de nombreuses collections de nombres réels issus de la vie courante (factures, populations de villes, longueurs de fleuves), le premier chiffre significatif d n'est pas équiréparti : la proportion des nombres commençant par d est très bien approchée par $P(d) = \log\left(1 + \frac{1}{d}\right)$, où $\log t = \frac{\ln t}{\ln 10}$ est le logarithme décimal.

- 3.1 Calculer $P(1)$ et $P(9)$, arrondis à 10^{-3} . Comparer à la proportion $\frac{1}{9}$ que donnerait l'équirépartition.
- 3.2 Démontrer que, pour tout $d \in \{1; \dots; 9\}$, $P(d) = \log(d+1) - \log d$. En déduire, sans calculatrice, que $P(1) + P(2) + \dots + P(9) = 1$.
- 3.3 Démontrer que $P(1) > P(2) > \dots > P(9)$ (on étudiera les variations de la fonction $t \mapsto \log\left(1 + \frac{1}{t}\right)$ sur $[1; 9]$).

- 3.4** Un service de contrôle examine 2 000 factures : combien devrait-il en trouver dont le montant commence par 1 ? par 7 ? (Arrondir à l'unité.)

Exercice 4 L'algorithme de Briggs



Avant les calculatrices, on calculait les logarithmes par extractions successives de racines carrées. Soit $x > 0$; on définit (u_n) par $u_0 = x$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$.

- 4.1** Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 0$, $u_n > 0$ et $\ln u_n = \frac{\ln x}{2^n}$. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln u_n$, puis que (u_n) converge vers 1.

- 4.2** D'après la question 2.2, $\ln t \approx t - 1$ pour t proche de 1 : en déduire que, pour n grand, $\ln x \approx 2^n (u_n - 1)$.

- 4.3** Recopier et compléter les lignes 6 et 7 de la fonction `briggs` ci-contre. Quelle valeur approchée de $\ln 2$ donne `briggs(2, 20)` ? Comparer à $\ln 2$ à 10^{-6} près.

- 4.4** Pourquoi, sur une machine, augmenter indéfiniment n ne rend-il pas le résultat plus précis (*observer $u_n - 1$ devant u_n*) ?

```
1 from math import sqrt
2
3 def briggs(x, n):
4     u = x
5     for k in range(n):
6         u = ...
7     return ...
```

Exercice 5 Une suite qui converge lentement



On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier $n \geq 0$, $u_{n+1} = \ln(1 + u_n)$.

- 5.1** Démontrer par récurrence que $u_n > 0$ pour tout entier $n \geq 0$.
- 5.2** En utilisant l'inégalité $\ln(1 + t) \leq t$, valable pour tout $t > -1$ (conséquence de l'exercice 2), démontrer que (u_n) est décroissante.
- 5.3** En déduire que (u_n) converge vers $\ell \geq 0$; $g : t \mapsto \ln(1 + t)$ étant continue sur $[0; +\infty[$, justifier que $\ell = \ln(1 + \ell)$, puis que $\ell = 0$.
- 5.4** Écrire une fonction Python `rang(e)` renvoyant le plus petit entier n tel que $u_n < e$, puis donner `rang(0.01)` et comparer cette vitesse de convergence à celle de $(0,9^n)$.

Exercice 6 Combien de solutions pour $\ln x = kx$?



Pour tout réel $k > 0$, on note f_k la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f_k(x) = \ln x - kx$.

- 6.1** Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_k(x)$, puis, en écrivant $f_k(x) = x \left(\frac{\ln x}{x} - k \right)$, déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_k(x)$.
- 6.2** Montrer que $f'_k(x) = \frac{1 - kx}{x}$, puis dresser le tableau de variations de f_k sur $]0; +\infty[$. Démontrer que le maximum de f_k vaut $-\ln k - 1$.
- 6.3** En discutant suivant les valeurs de $k > 0$, déterminer le nombre de solutions de l'équation $\ln x = kx$. Dans le cas particulier $k = \frac{1}{e}$, résoudre l'équation et démontrer que la droite d'équation $y = \frac{x}{e}$ est tangente à la courbe de $\ln$ au point d'abscisse e .
- 6.4** Pour $k = 0,2$, donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} de chacune des solutions de $\ln x = 0,2x$.