

TERMINALE SPÉCIALITÉ · MATHÉMATIQUES · ANALYSE · CHAPITRE 6

Fiche de cours Convexité

L'essentiel du chapitre en deux pages

définitions · propriétés · méthodes · à savoir par cœur



R. RINGUET · 2026 – 2027

1 FONCTION CONVEXE, FONCTION CONCAVE

Définition. Soit f une fonction définie sur un intervalle I , de courbe $\mathcal{C}_f$. La fonction f est **convexe** sur I lorsque, pour tous points A et B de $\mathcal{C}_f$ d'abscisses dans I , le segment $[AB]$ est *au-dessus* de la courbe entre A et B . Elle est **concave** lorsque le segment est *en dessous*.

Remarque. f est concave sur I si et seulement si $-f$ est convexe sur I .

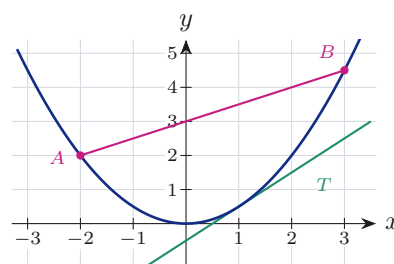


Figure 1 — Fonction convexe : la sécante $[AB]$ est au-dessus de $\mathcal{C}_f$, la tangente T en dessous.

2 CARACTÉRISATIONS PAR LA DÉRIVÉE

Théorème — admis. Soit f deux fois dérivable sur I . Les quatre propriétés suivantes sont équivalentes :

- f est convexe sur I ; f' est croissante sur I ; $f''(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$; $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de chacune de ses tangentes.

Pour f **concave**, on remplace par : f' décroissante, $f'' \leq 0$, $\mathcal{C}_f$ en dessous de ses tangentes.

Remarque. Idée de la démonstration (exigible) de « $f'' \geq 0$ entraîne $\mathcal{C}_f$ au-dessus de ses tangentes » : on pose $g(x) = f(x) - [f(a) + f'(a)(x - a)]$. Alors $g'(x) = f'(x) - f'(a)$ est croissante et s'annule en a , donc $g' \leq 0$ avant a et $g' \geq 0$ après : g admet en a un minimum égal à $g(a) = 0$, d'où $g \geq 0$.

Propriété — fonctions de référence. $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto e^x$ sont convexes sur $\mathbb{R}$; $x \mapsto \sqrt{x}$ est concave sur $[0 ; +\infty[$; $x \mapsto x^3$ est concave sur $]-\infty ; 0]$ et convexe sur $[0 ; +\infty[$; une fonction affine est à la fois convexe et concave.

3 POINT D'INFLEXION

Définition. Un **point d'inflexion** de $\mathcal{C}_f$ est un point en lequel f change de convexité (elle passe de convexe à concave, ou l'inverse).

Propriété. Si f'' s'annule **en changeant de signe** en a , alors le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse a est un point d'inflexion. En ce point, la tangente *traverse* la courbe.

Remarque. Un point d'inflexion correspond à un extremum local de f' : c'est le point où la pente de la tangente est maximale ou minimale.

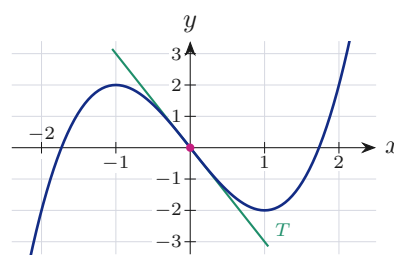


Figure 2 — $f(x) = x^3 - 3x$: point d'inflexion à l'origine, où la tangente traverse $\mathcal{C}_f$.

4 LECTURES GRAPHIQUES ET INÉGALITÉS

Méthode — lire la convexité. Sur $\mathcal{C}_f$: la courbe « tourne sa concavité vers le haut » là où f est convexe. Sur la courbe de f' : f est convexe là où f' croît. Sur la courbe de f'' : f est convexe là où f'' est positive. Les points d'inflexion sont les extremums de f' et les changements de signe de f'' .

Méthode — démontrer une inégalité. Si f est convexe, $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de sa tangente en a : $f(x) \geq f(a) + f'(a)(x - a)$ pour tout $x \in I$. Avec $f = \exp$ et $a = 0$: $e^x \geq 1 + x$ pour tout réel x . Avec $f = \ln$ (concave ; fonction étudiée au chapitre 7) et $a = 1$: $\ln x \leq x - 1$ pour tout $x > 0$.

5 SAVOIR-FAIRE DU CHAPITRE

► SAVOIR-FAIRE

- Lire sur une courbe les intervalles de convexité et de concavité, et les points d'inflexion.
- Dédurre la convexité de f de la lecture de la courbe de f' ou de celle de f'' .
- Calculer f'' , étudier son signe et dresser le tableau de convexité de f .
- Déterminer les points d'inflexion et justifier le changement de signe de f'' .
- Démontrer une inégalité en comparant la courbe à l'une de ses tangentes.
- Esquisser une courbe compatible avec les tableaux de variations et de convexité donnés.

6 EXEMPLES TYPES

★ EXEMPLE — tableau de convexité

$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ sur $\mathbb{R}$. Alors $f'(x) = 3x^2 - 6x$ et $f''(x) = 6x - 6$. On a $f''(x) < 0$ pour $x < 1$ et $f''(x) > 0$ pour $x > 1$: f est *concave* sur $] -\infty ; 1]$ et *convexe* sur $[1 ; +\infty [$. Comme f'' change de signe en 1, le point de coordonnées $(1 ; 0)$ est un point d'inflexion.

★ EXEMPLE — convexité d'une fonction avec exponentielle

$g(x) = x e^x$ sur $\mathbb{R}$. Alors $g'(x) = (1+x)e^x$ et $g''(x) = (2+x)e^x$. Comme $e^x > 0$, g'' est du signe de $2+x$: g est *concave* sur $] -\infty ; -2]$, *convexe* sur $[-2 ; +\infty [$, et le point d'abscisse -2 , d'ordonnée $-2e^{-2} \approx -0,27$, est un point d'inflexion.

★ EXEMPLE — inégalité par la tangente

La fonction $\exp$ est *convexe* sur $\mathbb{R}$ car $(e^x)'' = e^x > 0$. Sa tangente au point d'abscisse 0 a pour équation $y = x + 1$. La courbe étant au-dessus de ses tangentes, on en déduit $e^x \geq 1 + x$ pour tout réel x , avec égalité uniquement pour $x = 0$.

★ EXEMPLE — inégalité par une tangente, cas concave

La fonction racine carrée est *concave* sur $] 0 ; +\infty [$ car $(\sqrt{x})'' = -\frac{1}{4x\sqrt{x}} < 0$. Sa tangente au point d'abscisse 1 a pour équation $y = \frac{x+1}{2}$. La courbe étant en dessous de ses tangentes, on obtient $\sqrt{x} \leq \frac{x+1}{2}$ pour tout $x > 0$ (et aussi pour $x = 0 : 0 \leq \frac{1}{2}$).

★ EXEMPLE — interprétation en contexte

Le nombre d'utilisateurs d'un service, en milliers, est modélisé par une fonction N croissante sur $[0 ; 12]$ (en mois). Si N est *convexe* sur $[0 ; 5]$, la croissance s'**accélère** ; si N est *concave* sur $[5 ; 12]$, elle **ralentit**. Le point d'inflexion d'abscisse 5 est l'instant où la vitesse de croissance est maximale.

★ EXEMPLE — lecture sur la courbe de f'

Si la courbe de f' décroît sur $[0 ; 3]$ puis croît sur $[3 ; 7]$, alors f est *concave* sur $[0 ; 3]$, *convexe* sur $[3 ; 7]$ et le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse 3 est un point d'inflexion (le minimum de f' y est atteint).

✖ PIÈGES

- Convexité et sens de variation sont deux choses distinctes : une fonction peut être décroissante et convexe.
- $f''(a) = 0$ ne suffit pas : il faut un **changement de signe** de f'' ($x \mapsto x^4$ vérifie $f''(0) = 0$ sans point d'inflexion en 0).
- Ne pas confondre les courbes de f , de f' et de f'' : on lit la convexité de f sur les *variations* de f' , ou sur le *signe* de f'' .
- Une sécante est au-dessus de la courbe pour une fonction convexe, mais la tangente, elle, est en dessous.
- L'inégalité issue d'une tangente n'est valable que sur l'intervalle où la convexité est établie.