

TERMINALE SPÉCIALITÉ · MATHÉMATIQUES · ANALYSE · CHAPITRE 6



R. RINGUET · 2026 – 2027

Exercices 1 Convexité

Les bases : convexité, concavité, dérivée seconde, point d'inflexion

8 exercices · niveau ●○○○ à ●●○○ · durée conseillée : 2 h · calculatrice autorisée

★ À RETENIR — Ce qu'il faut savoir faire à la fin de la feuille

- Reconnaître convexité, concavité et point d'inflexion sur la courbe de f ou sur celle de f' .
- Calculer f'' , étudier son signe, en déduire la convexité de f et ses points d'inflexion; démontrer une inégalité à l'aide d'une tangente.

■ RAPPEL — Le formulaire du chapitre

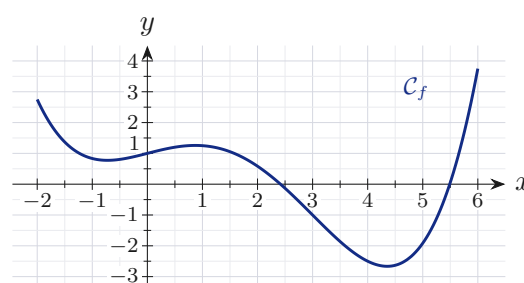
- **Définition.** f est *convexe* sur I lorsque, pour tous points A et B de sa courbe d'abscisses dans I , la sécante $[AB]$ est au-dessus de la courbe entre A et B ; *concave* lorsque la sécante est en dessous.
- **Théorème (admis).** Pour f deux fois dérivable sur I : f convexe sur $I \iff f'$ croissante sur $I \iff f'' \geq 0$ sur $I \iff C_f$ au-dessus de ses tangentes. (Concave : f' décroissante, $f'' \leq 0$, courbe sous ses tangentes.)
- **Point d'inflexion.** Point de C_f où f change de convexité : si f'' s'annule en changeant de signe en a , le point d'abscisse a est un point d'inflexion et la tangente y traverse la courbe.

Exercice 1 Lire la convexité sur une courbe

●○○○

La figure 1 représente la courbe C_f d'une fonction f deux fois dérivable sur $[-2; 6]$. Les abscisses des points d'inflexion sont des entiers.

- 1.1 Déterminer les intervalles sur lesquels f est convexe, puis ceux sur lesquels f est concave.
- 1.2 Donner les coordonnées des points d'inflexion de C_f .
- 1.3 Sur quel intervalle f' est-elle décroissante? Justifier.
- 1.4 Parmi les points de C_f d'abscisse comprise entre 0 et 6, en quel point la tangente a-t-elle le plus petit coefficient directeur? Justifier.

Figure 1 — Courbe C_f sur $[-2; 6]$

Exercice 2 Calculer une dérivée seconde et conclure

●○○○

Calculer $f'(x)$ puis $f''(x)$, étudier le signe de $f''(x)$ et en déduire les intervalles de convexité et de concavité de f (fonctions définies sur $\mathbb{R}$, sauf e) et f) définies sur $]0; +\infty[$).

- | | | |
|---------------------------------|----------------------------|-------------------------|
| a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 5x - 1$ | b) $f(x) = x^4 - 6x^2 + 3$ | c) $f(x) = e^{2x} - 3x$ |
| d) $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 9x$ | e) $f(x) = \sqrt{x}$ | f) $f(x) = \frac{1}{x}$ |

Exercice 3 Points d'inflexion : attention au piège

●●○○

Déterminer les points d'inflexion (abscisse et ordonnée) des courbes des fonctions suivantes, définies sur $\mathbb{R}$, ou justifier qu'il n'y en a pas.

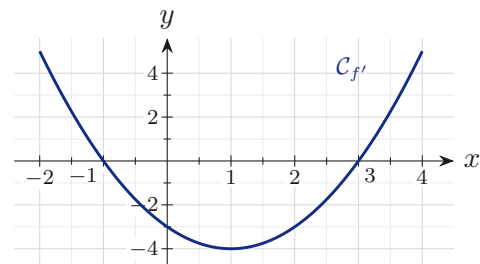
- 3.1 $f(x) = (x - 1)^3 + 2$; puis $g(x) = x e^x$ (ordonnée exacte, puis arrondie à 10^{-2}).
- 3.2 $k(x) = x^4 + 2x$: calculer $k''(x)$ et expliquer pourquoi le fait que k'' s'annule en 0 ne suffit pas à conclure.

Exercice 4 Lire la convexité sur la courbe de f'

●○○

Soit f une fonction deux fois dérivable sur $[-2; 4]$. La figure 2 représente la courbe de sa *fonction dérivée* f' (et non celle de f).

- 4.1 Dresser le tableau de variations de f sur $[-2; 4]$ (sans valeur).
- 4.2 Sur quel intervalle f' est-elle croissante ? En déduire la convexité de f .
- 4.3 Justifier que $\mathcal{C}_f$ admet un unique point d'inflexion et donner son abscisse.
- 4.4 Lire $f'(1)$: que représente ce nombre pour $\mathcal{C}_f$?

Figure 2 — Courbe de f' sur $[-2; 4]$

Exercice 5 Un tableau de convexité

●○○

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^4 - 4x^3 + 12$.

- 5.1 Calculer $f'(x)$, puis montrer que $f''(x) = 12x(x - 2)$. Recopier et compléter le tableau 1 (signe de f'' , puis « convexe » ou « concave »).
- 5.2 En déduire les coordonnées des points d'inflexion de la courbe de f .

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$f''(x)$				
Convexité				

Tableau 1 — À compléter

Exercice 6 Deux inégalités par convexité

●●○

- 6.1 Justifier que la fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$, puis déterminer une équation de la tangente T à sa courbe au point d'abscisse 0.
- 6.2 À l'aide de la position d'une courbe convexe par rapport à ses tangentes, démontrer que $e^x \geq 1 + x$ pour tout réel x , puis le retrouver en étudiant $g : x \mapsto e^x - x - 1$.
- 6.3 De même, à l'aide de la tangente en 1 à la parabole d'équation $y = x^2$, démontrer que $x^2 \geq 2x - 1$ pour tout réel x ; le retrouver par une identité remarquable.

Exercice 7 Une étude complète

●●○

Soit f définie sur $[-1; 3]$ par $f(x) = 0,5x^3 - 1,5x^2 + 2$, de courbe $\mathcal{C}_f$.

- 7.1 Montrer que $f'(x) = 1,5x(x - 2)$, étudier son signe et dresser le tableau de variations de f .
- 7.2 Calculer $f''(x)$, étudier son signe, préciser la convexité de f et les coordonnées du point d'inflexion I .
- 7.3 Déterminer une équation de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ au point I .
- 7.4 Calculer $f(-1)$, $f(0)$, $f(2)$ et $f(3)$, puis tracer T et l'allure de $\mathcal{C}_f$ dans le repère ci-contre.

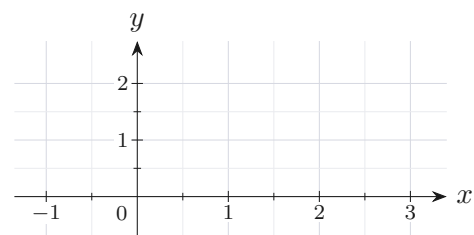


Figure 3 — Repère à compléter

Exercice 8 Vrai ou faux ?

●●○

Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse et justifier (un contre-exemple suffit pour réfuter).

- a) Si $f''(x) \geq 0$ sur I , alors f est croissante sur I . b) Si $f''(a) = 0$, alors $\mathcal{C}_f$ a un point d'inflexion en a .
- c) $x \mapsto \frac{1}{x}$ est convexe sur $] -\infty; 0[$. d) La somme de deux fonctions deux fois dérivables et convexes sur I est convexe sur I .