

TERMINALE SPÉCIALITÉ · MATHÉMATIQUES · ANALYSE · CHAPITRE 6



R. RINGUET · 2026 – 2027

Approfondissement Convexité

Pour aller plus loin : démontrer le cours, inégalité des pentes, moyennes, courbe de Lorenz

7 exercices · niveau ●●● · durée conseillée : 2 h 30 · calculatrice autorisée

Exercice 1 La démonstration du cours : courbe et tangentes



Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I telle que $f''(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$, et soit a un réel de I . On note T_a la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a , et l'on pose, pour tout $x \in I$,

$$g(x) = f(x) - [f(a) + f'(a)(x - a)].$$

- 1.1 Interpréter graphiquement le nombre $g(x)$. Calculer $g(a)$.
- 1.2 Calculer $g'(x)$ et justifier que g' est croissante sur I . En déduire le signe de $g'(x)$ pour $x \leq a$, puis pour $x \geq a$.
- 1.3 Dresser le tableau de variations de g , en déduire $g \geq 0$ sur I et conclure : *la courbe d'une fonction convexe est au-dessus de chacune de ses tangentes*.
- 1.4 Énoncer, sans le démontrer, le résultat analogue pour une fonction *concave* sur I .

Exercice 2 L'inégalité des pentes



Soit f une fonction convexe et deux fois dérivable sur un intervalle I , et soient a, b, c trois réels de I tels que $a < b < c$. On admet le résultat de l'exercice 1 : pour tous réels x et t de I , $f(x) \geq f(t) + f'(t)(x - t)$.

- 2.1 En appliquant cette inégalité avec $t = a$ et $x = b$, démontrer que $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \geq f'(a)$.
- 2.2 En l'appliquant avec $t = b$ et $x = a$, démontrer que $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq f'(b)$ (attention au signe de $a - b$).
- 2.3 En déduire l'inégalité des pentes : $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(c) - f(b)}{c - b}$, puis l'interpréter graphiquement.
- 2.4 Appliquer l'inégalité des pentes à la fonction exponentielle avec $a = 0$, $b = 1$ et $c = 2$: quelle inégalité obtient-on entre e et e^2 ? Vérifier à la calculatrice.

Exercice 3 Moyenne arithmétique et moyenne géométrique



- 3.1 Démontrer que la fonction racine carrée est concave sur $]0; +\infty[$.
- 3.2 Déterminer une équation de la tangente à sa courbe au point d'abscisse 1, puis, à l'aide de la question 1.4, démontrer que $\sqrt{t} \leq \frac{1+t}{2}$ pour tout réel $t \geq 0$.
- 3.3 Soient $a > 0$ et $b > 0$. En appliquant l'inégalité précédente à $t = \frac{a}{b}$, démontrer l'inégalité arithmético-géométrique : $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$.
- 3.4 Déterminer le cas d'égalité, puis, parmi les rectangles d'aire 36 m^2 , celui de plus petit périmètre (que l'on calculera).

Exercice 4 La courbe de Lorenz et les inégalités de revenus



Dans un pays, on classe les ménages par revenu croissant. Pour $x \in [0; 1]$, on note $L(x)$ la part du revenu total perçue par les $100x\%$ de ménages les plus modestes : la courbe de L est la *courbe de Lorenz* du pays. On modélise ici $L(x) = 0,4x^2 + 0,6x^4$.

- 4.1 Vérifier que $L(0) = 0$ et $L(1) = 1$, puis démontrer que L est croissante et convexe sur $[0; 1]$.
- 4.2 En utilisant la définition de la convexité avec la sécante joignant les points $O(0; 0)$ et $A(1; 1)$, justifier que $L(x) \leq x$ sur $[0; 1]$, puis interpréter concrètement.
- 4.3 Calculer $L(0,5)$ et $L(0,9)$: quelle part du revenu les 10 % les plus aisés perçoivent-ils ?
- 4.4 Démontrer que $L'(x) = 1$ admet une unique solution x_0 sur $[0; 1]$ et en donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} .
- 4.5 Le revenu du ménage de rang x_0 égale le revenu moyen du pays : interpréter la valeur de x_0 .

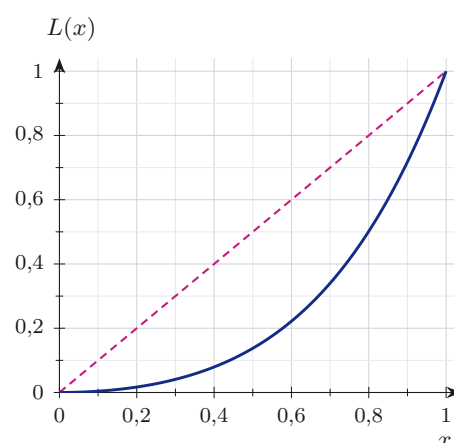


Figure 1 — Courbe de Lorenz et droite $y = x$

Exercice 5 Affiner l'inégalité $e^x \geq 1 + x$



- 5.1 Rappeler brièvement pourquoi $e^x \geq 1 + x$ pour tout réel x .
- 5.2 Soit $g(x) = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}$ sur $[0; +\infty[$. Calculer $g'(x)$ et, à l'aide de 5.1, justifier que $g' \geq 0$.
- 5.3 En déduire que $e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2}$ pour tout réel $x \geq 0$. Cette inégalité est-elle encore vraie pour $x = -3$?
- 5.4 Par la même méthode, démontrer que $e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$ pour tout $x \geq 0$.
- 5.5 En déduire $\frac{e^x}{x^2} \geq \frac{x}{6}$ pour $x > 0$, puis retrouver $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$.

Exercice 6 Une famille de courbes et leurs points d'inflexion



Pour tout réel m , on note f_m la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_m(x) = x^3 + mx^2 + x$, et $\mathcal{C}_m$ sa courbe représentative.

- 6.1 Calculer $f_m''(x)$ et montrer que $\mathcal{C}_m$ a un unique point d'inflexion I_m , de coordonnées à exprimer en fonction de m .
- 6.2 Démontrer que tous les points I_m , $m \in \mathbb{R}$, appartiennent à la courbe d'équation $y = -2x^3 + x$. Tous ses points sont-ils atteints ?
- 6.3 Déterminer l'ensemble des réels m pour lesquels f_m est convexe sur $[0; +\infty[$.
- 6.4 Déterminer l'ensemble des réels m pour lesquels f_m est croissante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 7 Convexité et moyennes : l'inégalité du milieu



Soit f une fonction convexe sur un intervalle I .

- 7.1 Soient a et b dans I . En considérant le milieu de la sécante d'extrémités d'abscisses a et b , démontrer que $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$.
- 7.2 En l'appliquant trois fois, démontrer que $f\left(\frac{a+b+c+d}{4}\right) \leq \frac{f(a)+f(b)+f(c)+f(d)}{4}$ pour tous a, b, c, d de I .
- 7.3 Application : démontrer que $e^{\frac{a+b}{2}} \leq \frac{1}{2}(e^a + e^b)$ pour tous réels a et b ; vérifier pour $a = 0$ et $b = 2$.
- 7.4 (hors programme) Démontrer par récurrence que, pour $n \geq 1$ et tous $x_1, \dots, x_{2^n}$ de I , $f\left(\frac{x_1 + \dots + x_{2^n}}{2^n}\right) \leq \frac{f(x_1) + \dots + f(x_{2^n})}{2^n}$.