

Fiche de cours Continuité

L'essentiel du chapitre en deux pages

définitions · propriétés · méthodes · à savoir par cœur

1 CONTINUITÉ D'UNE FONCTION

Définition. Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $a \in I$. La fonction f est **continue en a** lorsque $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$; si a est une extrémité de I , seule la limite prise du côté de I intervient. Elle est **continue sur I** lorsqu'elle est continue en tout point de I .

Remarque. Graphiquement, la courbe d'une fonction continue sur I se trace « sans lever le crayon » sur I . Un **saut** (tarif par paliers, fonction partie entière E) signale une discontinuité.

Propriété. Les fonctions polynômes, la fonction racine carrée, la fonction valeur absolue, la fonction exponentielle, les fonctions $\sin$ et $\cos$ sont continues sur tout intervalle où elles sont définies; il en va de même de leurs sommes, produits, quotients (dénominateur non nul) et composées.

Propriété. Toute fonction **dérivable** sur I est continue sur I . La réciproque est fautive : $x \mapsto |x|$ est continue en 0 mais n'y est pas dérivable (deux demi-tangentes distinctes).

2 THÉORÈME DES VALEURS INTERMÉDIAIRES

Théorème — TVI. Si f est continue sur $[a; b]$ et si k est un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$, alors l'équation $f(x) = k$ admet **au moins une** solution dans $[a; b]$.

Théorème — corollaire. Si de plus f est **strictement monotone** sur $[a; b]$, cette solution est **unique**. Le résultat s'étend à un intervalle ouvert ou non borné : à une borne exclue, on remplace la valeur de f par sa limite, et k doit être **strictement** compris entre ces limites (une limite n'est pas atteinte : $e^x = 0$ n'a pas de solution).

Remarque. Dans un tableau de variations, une flèche oblique signifie que f est continue et strictement monotone sur l'intervalle : le corollaire s'applique directement sur chaque flèche.

Méthode — encadrer la solution α . Balayage : calculer f de 0,1 en 0,1 jusqu'au changement de signe, puis de 0,01 en 0,01, etc.

Dichotomie : partir de $[a; b]$, calculer f au milieu m , garder la moitié où f change de signe; après n étapes, l'amplitude vaut $\frac{b-a}{2^n}$.

3 COMPTER LES SOLUTIONS DE $f(x) = k$

Méthode — lecture sur un tableau de variations. Sur chaque intervalle où f est continue et strictement monotone (une flèche du tableau), comparer k aux valeurs — ou aux limites — aux extrémités : si k est **strictement** compris entre elles, l'équation $f(x) = k$ a exactement **une** solution à l'intérieur de la flèche; sinon elle n'y en a **aucune**. On additionne sur toutes les flèches, puis on ajoute les valeurs x du tableau où $f(x) = k$, chacune **une seule fois** (une extrémité commune à deux flèches ne compte pas double).

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$		
$f'(x)$		+	0	-	0	+
$f(x)$						

$-\infty$

$\nearrow$

5

$\searrow$

1

$\nearrow$

$+\infty$

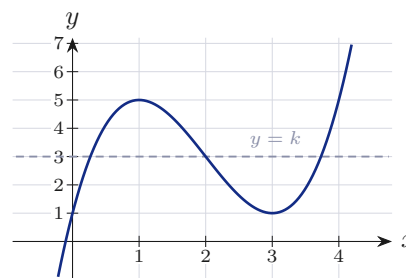


Figure 1 — Pour $k = 3$, l'équation $f(x) = k$ a une solution sur chacune des trois flèches.

4 CONTINUITÉ ET SUITES

Propriété. Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ et si f est continue en ℓ , alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f(\ell)$.

Théorème — point fixe. Soit (u_n) définie par $u_{n+1} = f(u_n)$. Si (u_n) converge vers ℓ et si f est continue en ℓ , alors ℓ vérifie $f(\ell) = \ell$.

Méthode — déterminer la limite d'une suite $u_{n+1} = f(u_n)$. Établir d'abord la convergence (suite croissante et majorée, par exemple), puis résoudre l'équation $f(x) = x$ et retenir la solution compatible avec l'encadrement obtenu pour (u_n) .

5 SAVOIR-FAIRE DU CHAPITRE

► SAVOIR-FAIRE

- Lire la continuité d'une fonction sur un graphique ; citer un contre-exemple (partie entière, tarif par paliers).
- Justifier qu'une fonction est continue sur un intervalle à l'aide des fonctions de référence et des opérations.
- Déterminer un paramètre pour raccorder deux morceaux de courbe en une fonction continue.
- Appliquer le TVI et son corollaire pour prouver l'existence, puis l'unicité, d'une solution de $f(x) = k$.
- Encadrer cette solution par balayage ou par dichotomie, et en déduire le signe de f .
- Déterminer la limite éventuelle d'une suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ en résolvant $f(x) = x$.

6 EXEMPLES TYPES

★ EXEMPLE — raccordement

Pour quelle valeur de a la fonction définie par $f(x) = x^2 + 3$ si $x \leq 1$ et $f(x) = ax + 1$ si $x > 1$ est-elle continue sur $\mathbb{R}$? Il faut $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$, soit $a + 1 = 4 : a = 3$.

★ EXEMPLE — existence et unicité

Soit $f(x) = x^3 + 2x - 4$ sur $\mathbb{R}$. On a $f'(x) = 3x^2 + 2 > 0$: f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, avec $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

Comme 0 est compris entre ces deux limites, l'équation $f(x) = 0$ admet une *unique* solution α dans $\mathbb{R}$. Or $f(1) = -1 < 0$ et $f(2) = 8 > 0$, donc $1 < \alpha < 2$; puis $f(1,1) \approx -0,47$ et $f(1,2) \approx 0,13$ donnent $1,1 < \alpha < 1,2$.

★ EXEMPLE — signe d'une fonction

Avec la fonction f précédente : f étant strictement croissante et s'annulant en α , on a $f(x) < 0$ sur $] -\infty ; \alpha[$ et $f(x) > 0$ sur $] \alpha ; +\infty[$.

★ EXEMPLE — limite d'une suite récurrente

Soit $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 6}$. On admet que (u_n) converge vers un réel $\ell \geq 0$. La fonction $f : x \mapsto \sqrt{x + 6}$ est continue sur $[-6 ; +\infty[$, donc ℓ vérifie $\sqrt{\ell + 6} = \ell$, d'où $\ell^2 - \ell - 6 = 0$, soit $\ell = 3$ ou $\ell = -2$. Comme $\ell \geq 0$, on conclut $\ell = 3$.

✖ PIÈGES

- Le TVI seul donne l'existence d'une solution, jamais l'unicité : il faut la stricte monotonie pour conclure à l'unicité.
- Vérifier la continuité avant d'appliquer le TVI : sur un tarif par paliers, une valeur intermédiaire peut n'être jamais atteinte.
- Continue n'est pas dérivable : $x \mapsto |x|$ et $x \mapsto \sqrt{x}$ sont continues en 0 sans y être dérivables.
- L'équation $f(x) = x$ donne les *candidats* pour la limite : encore faut-il savoir que la suite converge, puis trancher entre les solutions grâce à un encadrement.
- Un encadrement obtenu par balayage doit être justifié par un changement de signe de f , pas par l'affichage de la calculatrice.