

TERMINALE SPÉCIALITÉ · MATHÉMATIQUES · ANALYSE · CHAPITRE 4



R. RINGUET · 2026 – 2027

Exercices 1 Continuité

Les bases : reconnaître une fonction continue, appliquer le théorème des valeurs intermédiaires

9 exercices · niveau ●○○ à ●●○ · durée conseillée : 2 h · calculatrice autorisée

★ À RETENIR — Ce qu'il faut savoir faire à la fin de la feuille

- Reconnaître graphiquement et par le calcul si une fonction est continue en un point, sur un intervalle ; raccorder deux morceaux de courbe ; citer un contre-exemple (partie entière, tarif par paliers).
- Appliquer le théorème des valeurs intermédiaires et son corollaire pour dénombrer et encadrer les solutions d'une équation $f(x) = k$; utiliser la continuité pour trouver la limite éventuelle d'une suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$.

■ RAPPEL — Le formulaire du chapitre

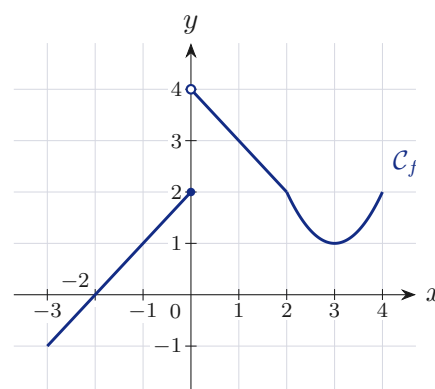
- Définition.** f est continue en a lorsque $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$ (une seule limite si a est une borne de l'intervalle) ; continue sur un intervalle I lorsqu'elle l'est en tout point de I : sa courbe se trace « sans lever le crayon ».
- Fonctions continues.** Les fonctions polynômes, racine carrée, valeur absolue, exponentielle, $\sin$ et $\cos$ sont continues sur tout intervalle où elles sont définies, ainsi que leurs sommes, produits, quotients (dénominateur non nul) et composées. **Toute fonction dérivable sur I est continue sur I ; la réciproque est fausse** ($x \mapsto |x|$ en 0).
- Théorème des valeurs intermédiaires (TVI).** Si f est continue sur $[a ; b]$ et si k est compris entre $f(a)$ et $f(b)$, alors l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution dans $[a ; b]$.
- Corollaire.** Si de plus f est strictement monotone sur $[a ; b]$, cette solution est unique (sur un intervalle ouvert ou non borné, on remplace $f(a)$ ou $f(b)$ par la limite de f à la borne exclue, et k doit être strictement compris entre ces limites). Une flèche oblique dans un tableau de variations signifie que f y est continue et strictement monotone.
- Suites récurrentes.** Si $u_{n+1} = f(u_n)$, si (u_n) converge vers ℓ et si f est continue en ℓ , alors $f(\ell) = \ell$.

Exercice 1 Lire la continuité sur une courbe

●○○

La figure 1 représente la courbe d'une fonction f définie sur $[-3 ; 4]$. Un point noir indique que le point appartient à la courbe, un cercle blanc qu'il ne lui appartient pas.

- Pour chacun des réels $a = -1$, $a = 0$ et $a = 2$, déterminer $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ et $f(a)$, puis dire si f est continue en a .
- Donner les deux plus grands intervalles sur lesquels f est continue.
- On admet que $f(x) = 4 - x$ pour $x \in]0 ; 2]$ et que $f(x) = (x - 3)^2 + 1$ pour $x \in]2 ; 4]$. Calculer le coefficient directeur de la tangente à la courbe à gauche puis à droite du point d'abscisse 2 : la fonction f est-elle dérivable en 2 ? Que peut-on en conclure sur la réciproque de la propriété « toute fonction dérivable est continue » ?
- Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 1$, puis de l'équation $f(x) = 3$, sur $[-3 ; 4]$.

Figure 1 — Courbe de f sur $[-3 ; 4]$

Exercice 2 Continuité des fonctions usuelles



Pour chaque fonction, dire si elle est continue sur l'ensemble indiqué et justifier en une ligne.

a) $f : x \mapsto x^3 - 4x + 1$ sur $\mathbb{R}$

b) $g : x \mapsto \frac{2x-1}{x-3}$ sur $]3; +\infty[$

c) $h : x \mapsto \sqrt{x-2}$ sur $[2; +\infty[$

d) $k : x \mapsto \frac{x^2+1}{x^2-4}$ sur $[-1; 1]$

e) $m : x \mapsto 3e^{-2x} + x$ sur $\mathbb{R}$

f) $n : x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

Exercice 3 La fonction partie entière



Pour tout réel x , on note $E(x)$ le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x : c'est la *partie entière* de x . La figure 2 représente la fonction E sur $[-2; 3]$.

3.1 Calculer $E(2,7)$, $E(5)$, $E(-1,3)$ et $E(-4)$.

3.2 Déterminer $\lim_{x \rightarrow 2^-} E(x)$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} E(x)$ et $E(2)$. La fonction E est-elle continue en 2 ?

3.3 Soit n un entier relatif. Préciser la valeur de $E(x)$ sur $[n; n+1[$ et justifier que E y est continue. La fonction E est-elle dérivable en 2 ? Justifier sans calculer de taux d'accroissement.

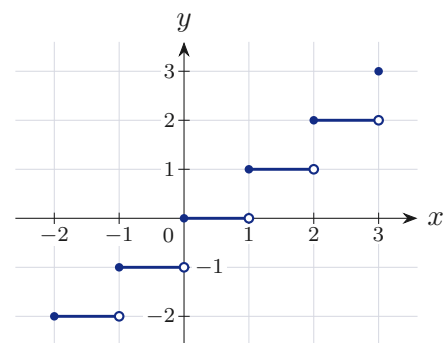


Figure 2 — La fonction partie entière

Exercice 4 Raccorder deux morceaux



Dans chaque cas, déterminer la valeur du réel demandé pour que la fonction soit continue sur $\mathbb{R}$.

4.1 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & \text{si } x \leq 1 \\ ax + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$: déterminer a .

4.2 $g(x) = \begin{cases} \frac{x^2-9}{x-3} & \text{si } x \neq 3 \\ b & \text{si } x = 3 \end{cases}$: déterminer b (on commencera par simplifier la fraction).

4.3 $h(x) = \begin{cases} 2x + c & \text{si } x < -1 \\ x^2 - 4 & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$: déterminer c .

Exercice 5 Compter les solutions à partir d'un tableau



Soit f une fonction **continue** sur $[-4; 5]$ dont le tableau de variations est donné ci-dessous.

x	-4	-2	3	5
$f(x)$	-4	6	-3	8

5.1 Justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement trois solutions sur $[-4; 5]$; préciser un intervalle contenant chacune d'elles.

5.2 Déterminer de même le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 6$, puis de l'équation $f(x) = -5$.

5.3 L'équation $f(x) = 7$ admet-elle une solution dans $[-2; 3]$? Et dans $[-4; 5]$? Justifier.

Exercice 6 Existence, unicité et encadrement



Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + x - 3$.

- 6.1 Calculer $f'(x)$ et en déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$. Déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, puis dresser le tableau de variations de f .
- 6.2 Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$. On précisera le théorème utilisé.
- 6.3 Calculer $f(1)$ et $f(2)$; en déduire un encadrement de α d'amplitude 1. Puis, par balayage à la calculatrice, donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-1} , puis d'amplitude 10^{-2} .
- 6.4 En déduire le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 7 Continue mais pas dérivable



- 7.1 Soit f la fonction valeur absolue : $f(x) = |x|$ pour tout réel x .
 - a) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et $f(0)$. La fonction f est-elle continue en 0 ?
 - b) Calculer le taux d'accroissement $\frac{f(h) - f(0)}{h}$ pour $h > 0$, puis pour $h < 0$. En déduire que f n'est pas dérivable en 0.
- 7.2 Soit g la fonction racine carrée, définie sur $[0; +\infty[$. Justifier que g est continue en 0, puis montrer que, pour tout réel $h > 0$, $\frac{g(h) - g(0)}{h} = \frac{1}{\sqrt{h}}$. Que vaut la limite de ce taux d'accroissement quand h tend vers 0^+ ? La fonction g est-elle dérivable en 0 ?
- 7.3 Recopier et compléter : « toute fonction dérivable sur I est ... sur I ; la réciproque est ... ».

Exercice 8 Un tarif par paliers



Le tarif d'un parking, en euros, est donné en fonction de la durée t de stationnement, exprimée en heures, par

$$T(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq t \leq 0,5 \\ 2,50 & \text{si } 0,5 < t \leq 2 \\ 4,00 & \text{si } 2 < t \leq 3 \\ 5,50 & \text{si } 3 < t \leq 4 \\ 7,00 & \text{si } 4 < t \leq 6 \end{cases}$$

- 8.1 Calculer $T(0,5)$, $T(1,75)$, $T(3)$ et $T(3,1)$. Représenter la fonction T sur $[0; 6]$ dans un repère d'unités 2 cm en abscisse et 1 cm en ordonnée.
- 8.2 En quels réels de $]0; 6[$ la fonction T n'est-elle pas continue ? Interpréter concrètement l'une de ces ruptures pour un automobiliste.
- 8.3 Un automobiliste dispose de 5 €. Existe-t-il une durée de stationnement pour laquelle il paie exactement 5 € ? Le théorème des valeurs intermédiaires est-il en défaut ? Expliquer.

Exercice 9 La limite d'une suite récurrente



Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{2x+3}$. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$.

- 9.1 Calculer u_1 , u_2 et u_3 , arrondis à 10^{-3} . Quelle conjecture peut-on faire sur la limite de (u_n) ?
- 9.2 Justifier que f est continue sur $[0; +\infty[$.
- 9.3 On admet que la suite (u_n) converge vers un réel $\ell \geq 0$. Justifier que ℓ vérifie $f(\ell) = \ell$.
- 9.4 Résoudre l'équation $f(x) = x$ sur $[0; +\infty[$, puis conclure sur la valeur de ℓ .