

TERMINALE SPÉCIALITÉ · MATHÉMATIQUES · ANALYSE · CHAPITRE 4



R. RINGUET · 2026 – 2027

Exercices 2 Continuité

Problèmes : dénombrer les solutions, encadrer par balayage et par dichotomie, étudier une suite récurrente

6 exercices · niveau ●●○ · durée conseillée : 2 h · calculatrice autorisée

★ À RETENIR — Ce qu'il faut savoir faire à la fin de la feuille

- Appliquer le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires sur chaque intervalle de monotonie pour dénombrer, discuter selon un paramètre et encadrer les solutions de $f(x) = k$; écrire et faire fonctionner un algorithme de balayage et un algorithme de dichotomie.
- Exploiter la continuité d'un modèle concret (abonnements, barème d'imposition) ; étudier une suite $u_{n+1} = f(u_n)$: monotonie et majoration par récurrence, convergence, puis limite obtenue en résolvant $f(\ell) = \ell$.

Exercice 1 Trois solutions pour une équation du troisième degré

●●○

Soit f la fonction définie sur $[0; 5]$ par $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$.

- 1.1 Montrer que, pour tout réel x de $[0; 5]$, $f'(x) = 3(x - 1)(x - 3)$, puis dresser le tableau de variations de f sur $[0; 5]$ (on calculera $f(0)$, $f(1)$, $f(3)$ et $f(5)$).
- 1.2 Démontrer que l'équation $f(x) = 3$ admet exactement trois solutions sur $[0; 5]$. On notera $\alpha < \beta < \gamma$ ces trois solutions.
- 1.3 Vérifier que $\beta = 2$.
- 1.4 Donner, par balayage à la calculatrice, un encadrement d'amplitude 10^{-1} de α , puis de γ .
- 1.5 En déduire, en fonction de x , le signe de $f(x) - 3$ sur $[0; 5]$.

Exercice 2 Balayage ou dichotomie ?

●●○

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 + 2x - 5$.

- 2.1 Justifier que g est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, puis que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α , avec $\alpha \in]1; 2[$.

```
1 def balayage(pas):
2     x = 1
3     while ... :
4         x = x + pas
5     return ...
```

```
1 def dichotomie(a, b, e):
2     while b - a > e:
3         m = (a + b)/2
4         if g(a)*g(m) <= 0:
5             b = ...
6         else:
7             a = ...
8     return a, b
```

- 2.2 La fonction balayage doit renvoyer un encadrement de α d'amplitude pas. Recopier et compléter les lignes 3 et 5, puis donner les valeurs renvoyées par balayage(0.1) et par balayage(0.01).
- 2.3 La fonction dichotomie doit renvoyer un encadrement de α d'amplitude inférieure ou égale à e , la fonction g ayant été définie par ailleurs. Recopier et compléter les lignes 5 et 7.
- 2.4 En partant de $a = 1$ et $b = 2$, effectuer « à la main » les trois premières étapes de la dichotomie : on donnera à chaque étape le milieu m , le signe de $g(m)$ et le nouvel encadrement de α .

- 2.5** Justifier qu'après n étapes de dichotomie l'amplitude de l'encadrement vaut $\frac{1}{2^n}$, puis déterminer le nombre d'étapes nécessaires pour obtenir une amplitude inférieure à 10^{-3} . Combien d'étapes faudrait-il à balayage pour la même précision ? Commenter.

Exercice 3 Les abonnés d'un service en ligne



Le nombre d'abonnés d'un service en ligne, exprimé en milliers, est modélisé t années après son lancement par $N(t) = 12 - 10e^{-0,25t}$, pour $t \geq 0$.

- 3.1** Calculer $N(0)$ et interpréter. Montrer que $N'(t) = 2,5e^{-0,25t}$ et en déduire le sens de variation de N .
- 3.2** Déterminer $\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t)$, en donner une interprétation graphique puis une interprétation dans le contexte de l'exercice.
- 3.3** Démontrer que le service atteint 10 000 abonnés à un unique instant t_0 . On énoncera précisément le théorème utilisé.
- 3.4** Par balayage à la calculatrice, donner un encadrement de t_0 d'amplitude 10^{-1} .
- 3.5** Le directeur annonce que le service dépassera 12 500 abonnés. Que penser de cette affirmation ?

Exercice 4 Une suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$



Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x+2}$, et soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$.

- 4.1** Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4 , arrondis à 10^{-3} . Conjecturer le sens de variation et la limite de (u_n) .
- 4.2** Justifier que f est continue et strictement croissante sur $[0; +\infty[$.
- 4.3** Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2$.
- 4.4** En déduire que (u_n) converge vers un réel ℓ de $[0; 2]$, puis justifier que $f(\ell) = \ell$. Résoudre cette équation sur $[0; 2]$ et conclure.

Exercice 5 Discuter selon un paramètre



Soit h la fonction définie sur $[-2; 2]$ par $h(x) = x^3 - 3x$, et soit m un nombre réel.

- 5.1** Dresser le tableau de variations de h sur $[-2; 2]$; on calculera $h(-2)$, $h(-1)$, $h(1)$ et $h(2)$.
- 5.2** Démontrer que, si $-2 < m < 2$, l'équation $h(x) = m$ admet exactement trois solutions sur $[-2; 2]$.
- 5.3** Discuter, selon les valeurs du réel m , le nombre de solutions de l'équation $h(x) = m$ sur $[-2; 2]$.
- 5.4** Pour $m = 1$, donner un encadrement d'amplitude 10^{-1} de chacune des solutions.

Exercice 6 Un barème d'imposition



Dans un pays, l'impôt annuel $I(r)$ dû par un foyer dont le revenu annuel est r euros est calculé par tranches :

$$I(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq r \leq 11\,000 \\ 0,11(r - 11\,000) & \text{si } 11\,000 < r \leq 28\,000 \\ a + 0,30(r - 28\,000) & \text{si } r > 28\,000 \end{cases}$$

où a est un réel à déterminer.

- 6.1** Calculer l'impôt dû par un foyer dont le revenu est de 9 000 €, puis de 20 000 €.
- 6.2** Déterminer la valeur de a pour que la fonction I soit continue sur $[0; +\infty[$. Calculer alors $I(40\,000)$.
- 6.3** Que se passerait-il, pour un foyer dont le revenu est proche de 28 000 €, si l'on prenait $a = 2\,500$? Expliquer pourquoi le législateur tient à la continuité de I .
- 6.4** Justifier que l'équation $I(r) = 4\,000$ admet une unique solution sur $[0; +\infty[$, puis la déterminer par le calcul.