

TERMINALE SPÉCIALITÉ · MATHÉMATIQUES · ANALYSE · CHAPITRE 4



R. RINGUET · 2026 – 2027

Contrôle B Continuité

Vrai ou faux, fonction en escalier, TVI et dichotomie, suite définie par

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

Durée : 1 h · calculatrice autorisée · 4 exercices indépendants · barème sur 20

Nom : Prénom : Classe : Note : / 20

★ CONSIGNES

Toute application du théorème des valeurs intermédiaires ou de son corollaire doit être rédigée en vérifiant explicitement les hypothèses. Une affirmation déclarée fausse doit être réfutée par un contre-exemple explicite. La qualité de la rédaction est prise en compte dans la notation.

Exercice 1 Vrai ou faux ?

4 pts ●●○

Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse et **justifier** la réponse. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

- 1.1 **Affirmation** : « si f est continue sur $[0 ; 1]$ et si $f(0)$ et $f(1)$ sont de signes contraires, alors l'équation $f(x) = 0$ admet exactement une solution dans $[0 ; 1]$ ».
- 1.2 **Affirmation** : « toute fonction continue sur un intervalle I est dérivable sur I ».
- 1.3 **Affirmation** : « si la suite (u_n) définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers un réel ℓ et si f est continue en ℓ , alors $f(\ell) = \ell$ ».
- 1.4 **Affirmation** : « la fonction partie entière E est continue sur l'intervalle $[0 ; 0,5]$ ».

Exercice 2 Des frais d'expédition

4 pts ●●○

Un transporteur facture l'expédition d'un colis en fonction de sa masse m , exprimée en kilogrammes, selon le tarif suivant (en euros) :

$$F(m) = \begin{cases} 4,90 & \text{si } 0 < m \leq 1 \\ 7,50 & \text{si } 1 < m \leq 5 \\ 12,90 & \text{si } 5 < m \leq 10 \\ 24,90 & \text{si } 10 < m \leq 30 \end{cases}$$

- 2.1 Calculer $F(1)$, $F(1,2)$, $F(5)$ et $F(5,01)$. Représenter la fonction F sur $]0 ; 30]$ dans un repère d'unités 4 mm pour 1 kg en abscisse et 4 mm pour 1 € en ordonnée.
- 2.2 Déterminer les réels de $]0 ; 30[$ en lesquels F n'est pas continue. Un colis de 10,2 kg coûte-t-il beaucoup plus cher qu'un colis de 9,8 kg ? Commenter.
- 2.3 L'équation $F(m) = 20$ admet-elle une solution dans $]0 ; 30]$? Le théorème des valeurs intermédiaires est-il mis en défaut ? Expliquer.
- 2.4 Un client doit expédier 12 kg de marchandise ; il peut la répartir librement en plusieurs colis. Déterminer le coût total minimal et le nombre de colis correspondant. Comparer avec l'envoi d'un colis unique.

Exercice 3 Une équation qu'on ne résout pas par le calcul

7 pts ●●●

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x - 1)e^x$. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

- 3.1 Déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ en utilisant une croissance comparée, puis $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. En déduire l'équation d'une asymptote à $\mathcal{C}_f$.
- 3.2 Montrer que, pour tout réel x , $f'(x) = xe^x$, puis dresser le tableau de variations complet de f sur $\mathbb{R}$ (limites comprises).
- 3.3 Démontrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$, et que α appartient à $]1; 2[$. On justifiera en particulier qu'il n'y a aucune solution sur $]-\infty; 0]$.
- 3.4 Déterminer, par balayage à la calculatrice, un encadrement de α d'amplitude 10^{-2} .
- 3.5 En déduire le signe de $f(x) - 1$ sur $\mathbb{R}$.

```

1 def dico(e):
2     a = 1
3     b = 2
4     while b - a > e:
5         m = (a + b)/2
6         if (m - 1)*exp(m) < 1:
7             ...
8         else:
9             ...
10    return a, b

```

- 3.6 La fonction Python ci-contre, dans laquelle la fonction `exp` a été importée du module `math`, doit renvoyer un encadrement de α d'amplitude inférieure ou égale à e .

- a) Recopier et compléter les lignes 7 et 9.
- b) Justifier que l'amplitude de l'encadrement après n étapes vaut $\frac{1}{2^n}$, puis déterminer le nombre d'étapes effectuées lors de l'appel `dico(0.01)`.

Exercice 4 Une population qui sature

5 pts ●●●

Une réserve accueille une population de rongeurs. On note u_n l'effectif de cette population, exprimé en milliers, au bout de n années. On a $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{6u_n}{u_n + 2}$.

On note f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{6x}{x + 2}$, de sorte que $u_{n+1} = f(u_n)$.

- 4.1 Calculer u_1 , u_2 et u_3 ; on donnera les valeurs exactes. Interpréter u_3 dans le contexte de l'exercice.
- 4.2 Montrer que, pour tout réel $x \geq 0$, $f'(x) = \frac{12}{(x + 2)^2}$, et en déduire le sens de variation de f sur $[0; +\infty[$.
- 4.3 Sur la figure 1, à rendre avec la copie, on a tracé la courbe $\mathcal{C}_f$ et la droite d d'équation $y = x$. Placer u_0 sur l'axe des abscisses, puis construire les termes u_1 , u_2 et u_3 en laissant apparents les traits de construction. Quelles conjectures peut-on faire sur le sens de variation et sur la limite de la suite (u_n) ?

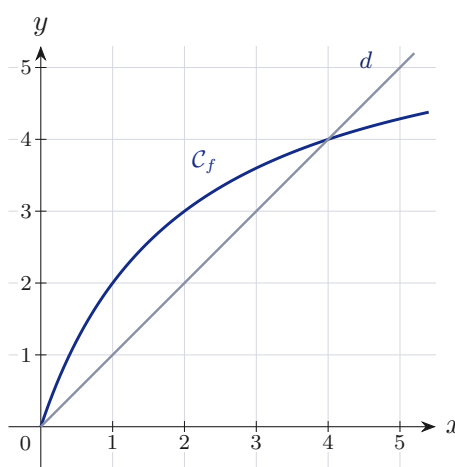


Figure 1 — Courbe $\mathcal{C}_f$ et droite d d'équation $y = x$

- 4.4 Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 4$.
- 4.5 En déduire que la suite (u_n) converge vers un réel ℓ appartenant à $[1; 4]$.
- 4.6 Justifier que f est continue sur $[1; 4]$, puis que ℓ vérifie $f(\ell) = \ell$. Résoudre cette équation et en déduire la valeur de ℓ . La population dépassera-t-elle un jour 4 000 rongeurs?