

TERMINALE SPÉCIALITÉ · MATHÉMATIQUES · ANALYSE · CHAPITRE 4



R. RINGUET · 2026 – 2027

Contrôle A Continuité

Continuité en un point, raccordement, théorème des valeurs intermédiaires, dichotomie

Durée : 1 h · calculatrice autorisée · 4 exercices indépendants · barème sur 20

Nom : Prénom : Classe : Note : / 20

★ CONSIGNES

Toute application du théorème des valeurs intermédiaires ou de son corollaire doit être rédigée en vérifiant explicitement les hypothèses (continuité, stricte monotonie, valeurs aux bornes). Les réponses du QCM ne demandent aucune justification. La qualité de la rédaction est prise en compte dans la notation.

Exercice 1 Questionnaire à choix multiples

5 pts ●○○○

Pour chacune des cinq questions, **une seule** des quatre réponses proposées est exacte. Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte un point; une réponse fausse ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

- 1.1** Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 1$ si $x < 2$ et $f(x) = ax - 1$ si $x \geq 2$. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ lorsque :
- a) $a = 2$ b) $a = 3$ c) $a = 5$ d) $a = 6$
- 1.2** En notant E la fonction partie entière, $E(-2,3)$ est égal à :
- a) -3 b) -2 c) 2 d) 3
- 1.3** Soit f une fonction continue sur $[-2; 5]$ telle que $f(-2) = 3$ et $f(5) = -1$. On peut affirmer que :
- a) f est décroissante sur $[-2; 5]$ b) l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution
- c) l'équation $f(x) = 4$ admet une solution d) l'équation $f(x) = 0$ admet exactement une solution
- 1.4** Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 12}$. On admet que (u_n) converge vers un réel $\ell \geq 0$. Alors ℓ est égal à :
- a) 3 b) 4 c) 6 d) 12
- 1.5** Parmi les fonctions suivantes, laquelle n'est **pas** continue sur $\mathbb{R}$?
- a) $x \mapsto |x|$ b) $x \mapsto \frac{x}{x^2 + 1}$ c) $x \mapsto E(x)$ d) $x \mapsto e^{-x}$

Exercice 2 Continuité et raccordement

4 pts ●○○○

- 2.1** Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2}$ si $x \neq 2$ et $f(2) = m$. Déterminer la valeur du réel m pour laquelle f est continue sur $\mathbb{R}$.
- 2.2** Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 3x + b$ si $x < 1$ et $g(x) = x^2 + 2$ si $x \geq 1$. Déterminer la valeur du réel b pour laquelle g est continue sur $\mathbb{R}$.
- 2.3** Justifier que la fonction $h : x \mapsto \frac{\sqrt{x+4}}{x-1}$ est continue sur $]1; +\infty[$.

Exercice 3 Combien de solutions ?

6 pts ●●●○

Soit p la fonction définie sur $[-3; 4]$ par $p(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5$.

- 3.1 Montrer que, pour tout réel x de $[-3; 4]$, $p'(x) = 6(x+1)(x-2)$.
- 3.2 Calculer $p(-3)$, $p(-1)$, $p(2)$ et $p(4)$, puis dresser le tableau de variations de p sur $[-3; 4]$.
- 3.3 Démontrer que l'équation $p(x) = 0$ admet exactement trois solutions sur $[-3; 4]$.
- 3.4 Déterminer, par balayage à la calculatrice, un encadrement d'amplitude 10^{-1} de chacune de ces trois solutions.
- 3.5 En déduire le signe de $p(x)$ sur $[-3; 4]$.
- 3.6 Déterminer le nombre de solutions de l'équation $p(x) = 12$ sur $[-3; 4]$.

Exercice 4 Une boîte sans couvercle

5 pts ●●●○

Dans une feuille de carton carrée de 30 cm de côté, on découpe aux quatre coins un carré de côté x , exprimé en centimètres, puis on replie les bords le long des pointillés : on obtient une boîte sans couvercle, de hauteur x . On note $V(x)$ son volume, exprimé en cm^3 .

- 4.1 Justifier que x appartient à $[0; 15]$ et que, pour tout x de cet intervalle, $V(x) = x(30 - 2x)^2$.
- 4.2 Montrer que, pour tout réel x de $[0; 15]$, $V'(x) = 12(x-5)(x-15)$, puis dresser le tableau de variations de V . En déduire le volume maximal de la boîte et la valeur de x qui le réalise.
- 4.3 Démontrer que l'équation $V(x) = 1500$ admet exactement deux solutions sur $[0; 15]$.
- 4.4 On cherche une valeur approchée de la plus petite de ces deux solutions, notée α , à l'aide de la fonction Python ci-dessous, dans laquelle V désigne la fonction V définie par ailleurs.

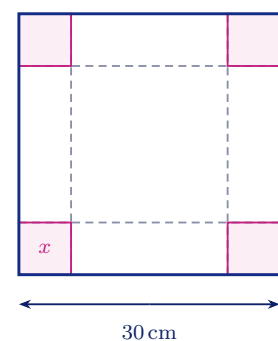


Figure 1 — Le patron de la boîte

```

1 def dico(a, b, e):
2     while b - a > e:
3         m = (a + b)/2
4         if V(m) < 1500:
5             a = ...
6         else:
7             b = ...
8     return a, b

```

- a) Vérifier que $V(2) < 1500 < V(3)$.
- b) Recopier et compléter les lignes 5 et 7 pour que l'appel `dico(2, 3, e)` renvoie un encadrement de α d'amplitude inférieure ou égale à e .
- c) Effectuer à la main les deux premières étapes de la dichotomie, en partant de $a = 2$ et $b = 3$.
- d) Combien d'étapes sont nécessaires pour obtenir un encadrement de α d'amplitude inférieure à 0,01 ?

- 4.5 Tracer dans le repère ci-dessous l'allure de la courbe de V sur $[0; 15]$ ainsi que la droite d'équation $y = 1500$, puis retrouver graphiquement les deux solutions de la question 4.3. (Repère à rendre avec la copie.)

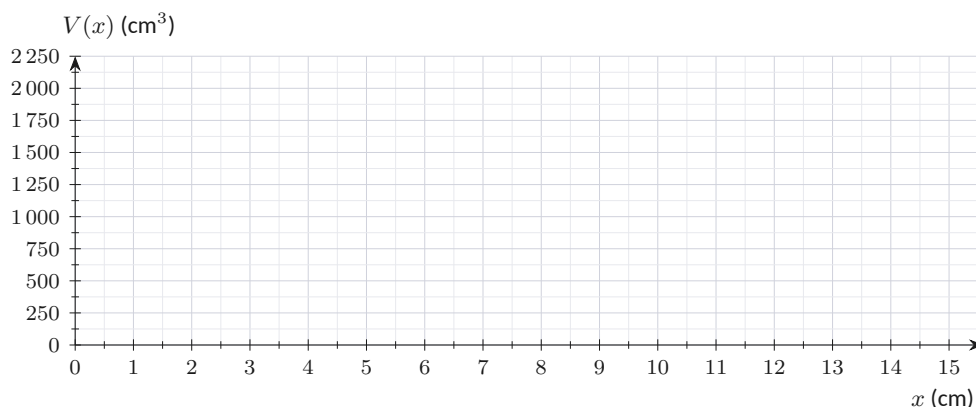


Figure 2 — Repère à compléter