

TERMINALE SPÉCIALITÉ · MATHÉMATIQUES · ANALYSE · CHAPITRE 4



R. RINGUET · 2026 – 2027

Approfondissement Continuité

Pour aller plus loin : démonstrations du cours, points fixes, méthode de Newton

6 exercices · niveau ●●● · durée conseillée : 2 h 30 · calculatrice autorisée

Exercice 1 Démontrer le théorème des valeurs intermédiaires

●●●

(La construction de suites adjacentes utilisée ici est hors programme : elle est donnée entièrement guidée, pour aller plus loin.) Soit f une fonction continue sur $[a; b]$ telle que $f(a) < 0 < f(b)$. On construit deux suites (a_n) et (b_n) de la façon suivante : $a_0 = a$, $b_0 = b$ et, pour tout entier naturel n , en posant $m = \frac{a_n + b_n}{2}$,

$$\text{si } f(m) \leq 0 : a_{n+1} = m \text{ et } b_{n+1} = b_n ; \quad \text{si } f(m) > 0 : a_{n+1} = a_n \text{ et } b_{n+1} = m.$$

- 1.1 Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $a \leq a_n \leq b_n \leq b$ et $f(a_n) \leq 0 < f(b_n)$.
- 1.2 Démontrer que, pour tout entier naturel n , $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$, puis déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} (b_n - a_n)$.
- 1.3 Justifier que (a_n) est croissante et majorée, que (b_n) est décroissante et minorée, puis que ces deux suites convergent vers un même réel c de $[a; b]$.
- 1.4 La fonction f étant continue en c , justifier que les suites $(f(a_n))$ et $(f(b_n))$ convergent toutes deux vers $f(c)$. En déduire, par passage à la limite dans les inégalités de la question 1.1, que $f(c) = 0$.
- 1.5 En appliquant ce résultat à la fonction $g : x \mapsto f(x) - k$, énoncer et démontrer le théorème des valeurs intermédiaires dans le cas général.
- 1.6 Démontrer le corollaire : si de plus f est strictement croissante sur $[a; b]$, la solution de $f(x) = k$ est unique.

Exercice 2 Dérivable, donc continue

●●●

- 2.1 Soit f une fonction dérivable en un réel a . Pour $x \neq a$, on pose $\tau(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$.
 - a) Justifier que $\lim_{x \rightarrow a} \tau(x) = f'(a)$, puis que, pour tout $x \neq a$, $f(x) = f(a) + (x - a) \tau(x)$.
 - b) En déduire $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, puis la propriété : toute fonction dérivable en a est continue en a .
- 2.2 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x - 2|$. Démontrer que f est continue en 2 mais n'y est pas dérivable. Que peut-on en conclure sur la réciproque de la propriété précédente ?
- 2.3 Soit g la fonction racine carrée. Démontrer que g est continue en 0, puis que $\frac{g(h) - g(0)}{h}$ tend vers $+\infty$ quand h tend vers 0^+ . Interpréter géométriquement.
- 2.4 Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = |x| + |x - 1| + |x - 3|$. Justifier que h est continue sur $\mathbb{R}$, déterminer les réels en lesquels h n'est pas dérivable, puis déterminer le minimum de h sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3 Tout polynôme de degré impair a une racine

●●●

- 3.1 Soit P la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = x^5 + ax^3 + bx + c$, où a , b et c sont trois réels. Vérifier que, pour tout réel $x \neq 0$, $P(x) = x^5 \left(1 + \frac{a}{x^2} + \frac{b}{x^4} + \frac{c}{x^5} \right)$, puis déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} P(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x)$.
- 3.2 En déduire que l'équation $P(x) = 0$ admet au moins une solution réelle. Ce résultat subsisterait-il pour $P(x) = x^4 + 1$?
- 3.3 Soit Q la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $Q(x) = x^5 - 5x + 2$. Dresser le tableau de variations de Q sur $\mathbb{R}$ (limites comprises) et démontrer que l'équation $Q(x) = 0$ admet exactement trois solutions réelles.

3.4 Donner, par balayage à la calculatrice, un encadrement d'amplitude 10^{-1} de chacune de ces trois solutions.

Exercice 4 Une fonction continue de $[0; 1]$ dans $[0; 1]$ a un point fixe



Soit f une fonction continue sur $[0; 1]$ telle que, pour tout réel x de $[0; 1]$, $f(x) \in [0; 1]$.

- 4.1** On pose $g(x) = f(x) - x$ pour $x \in [0; 1]$. Justifier que g est continue sur $[0; 1]$, puis déterminer le signe de $g(0)$ et celui de $g(1)$.
- 4.2** En déduire qu'il existe un réel c de $[0; 1]$ tel que $f(c) = c$. Peut-on affirmer que ce réel est unique ?
- 4.3** Soit φ la fonction définie sur $[0; 1]$ par $\varphi(x) = x + \frac{1}{2}$ si $0 \leq x < \frac{1}{2}$ et $\varphi(x) = x - \frac{1}{2}$ si $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$. Vérifier que $\varphi(x) \in [0; 1]$ pour tout x de $[0; 1]$, puis que φ n'admet aucun point fixe. Quelle hypothèse du résultat précédent n'est pas vérifiée ?
- 4.4** Application : soit f définie sur $[0; 1]$ par $f(x) = \frac{x^2 + 1}{3}$. Vérifier que f satisfait les hypothèses, puis déterminer la valeur exacte de son unique point fixe.

Exercice 5 La méthode de Newton : approcher $\sqrt{5}$



Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x^2 - 5$.

- 5.1** Justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $]0; +\infty[$, égale à $\sqrt{5}$, et que $\sqrt{5} \in]2; 3[$.
- 5.2** Soit u un réel strictement positif. Écrire une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse u , puis montrer qu'elle coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse $g(u) = \frac{1}{2} \left(u + \frac{5}{u} \right)$.
- 5.3** On pose $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = g(u_n)$. Calculer u_1 (valeur exacte), puis u_2 et u_3 arrondis à 10^{-7} . Comparer avec la valeur affichée par la calculatrice pour $\sqrt{5}$.
- 5.4** Recopier et compléter la ligne 4 de la fonction Python ci-contre.
- 5.5** On admet que (u_n) converge vers un réel $\ell > 0$. Justifier que g est continue sur $]0; +\infty[$, puis que $g(\ell) = \ell$; retrouver ainsi $\ell = \sqrt{5}$.
- 5.6** Combien d'étapes de dichotomie faudrait-il, en partant de $[2; 3]$, pour encadrer $\sqrt{5}$ avec une amplitude inférieure à 10^{-6} ? Comparer avec la méthode de Newton et commenter.
- 5.7** Méthode de la sécante. Soient A et B les points de la courbe de f d'abscisses 2 et 3. Montrer que la droite (AB) coupe l'axe des abscisses en $c = 2,2$, puis comparer $|c - \sqrt{5}|$ à l'erreur $|m - \sqrt{5}|$ commise en approchant $\sqrt{5}$ par le milieu m de $[2; 3]$ (première étape de la dichotomie).
- 5.8** Écrire une fonction Python `secante(a, b, e)` qui répète ce procédé, en remplaçant a ou b par c selon le signe de $f(c)$, jusqu'à obtenir $|f(c)| \leq e$, puis renvoie c .

```
1 def newton(e):
2     u = 2
3     while abs(u*u - 5) > e:
4         u = ...
5     return u
```

Exercice 6 Une équation sans solution explicite



Soit h la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $h(x) = x e^x$.

- 6.1** Étudier les variations de h sur $[0; +\infty[$ et déterminer sa limite en $+\infty$. Démontrer que l'équation $h(x) = 1$ admet une unique solution α sur $[0; +\infty[$, puis que $\alpha \in]0,5; 0,6[$.
- 6.2** Démontrer que, pour tout réel $x \geq 0$, $h(x) = 1$ équivaut à $e^{-x} = x$.
- 6.3** Donner, par balayage à la calculatrice, un encadrement de α d'amplitude 10^{-2} .
- 6.4** Soit (v_n) définie par $v_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n , $v_{n+1} = e^{-v_n}$. Calculer $v_1, \dots, v_5$ arrondis à 10^{-4} et justifier que (v_n) n'est pas monotone. On admet que (v_n) converge vers un réel $\ell \geq 0$: démontrer que $\ell = \alpha$.