

TERMINALE SPÉCIALITÉ · MATHÉMATIQUES · PROBABILITÉS · CHAPITRE 17



R. RINGUET · 2026 – 2027

Sujet type bac

Concentration et loi des grands nombres

Une plateforme de covoiturage : annulations, échantillons, taille d'un sondage interne — et un Vrai/Faux justifié

Durée : 1 h 30 · calculatrice autorisée · 2 exercices indépendants · barème sur 12

Nom : Prénom : Classe : Note : / 12

★ CONSIGNES

Les deux exercices sont indépendants et notés comme à l'épreuve écrite du baccalauréat (7 points et 5 points). La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements sont prises en compte. Toute modélisation par une loi binomiale doit être justifiée (épreuve de Bernoulli répétée, succès et sa probabilité, nombre de répétitions, indépendance) et toute application d'une inégalité de concentration doit préciser la variable utilisée, son espérance, sa variance et la valeur de ε . Sauf mention contraire, les probabilités seront arrondies à 10^{-3} et l'on indiquera le calcul effectué à la calculatrice.

Exercice 1 Une plateforme de covoiturage

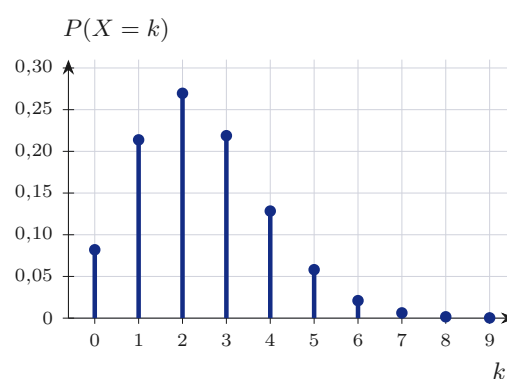
7 pts ●●○

Une plateforme de covoiturage constate qu'un trajet réservé sur son site est annulé avant le départ avec la probabilité 0,08, indépendamment des autres trajets. Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées indépendamment les unes des autres.

Partie A — Trente trajets réservés

Un conducteur propose 30 trajets au cours d'un mois. On note X le nombre de trajets annulés parmi ces 30 trajets; la figure 1 représente la loi de X .

- 1.1 Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
- 1.2 Calculer $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$ (arrondis à 10^{-3}), puis interpréter $E(X)$ dans le contexte de l'exercice.
- 1.3 Calculer la probabilité qu'aucun trajet ne soit annulé, puis celle qu'au moins un trajet le soit.
- 1.4 Calculer $P(X \leq 3)$ et lire sur la figure 1 la valeur de k la plus probable.
- 1.5 À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, majorer $P(|X - 2,4| \geq 3)$ (arrondi à 10^{-3}).
- 1.6 Justifier que l'événement $(|X - 2,4| \geq 3)$ est réalisé si et seulement si $X \geq 6$, puis calculer sa probabilité exacte. Comparer avec la majoration précédente et commenter en une ou deux phrases.

Figure 1 — La loi de X

Partie B — Un échantillon de cinq cents trajets

La plateforme prélève au hasard 500 trajets réservés au cours de l'année. Pour $1 \leq i \leq 500$, la variable Y_i vaut 1 si le i -ième trajet prélevé a été annulé et 0 sinon, et on pose $F = \frac{Y_1 + \dots + Y_{500}}{500}$.

- 1.7** Justifier que $(Y_1; \dots; Y_{500})$ est un échantillon de taille 500 d'une loi de Bernoulli dont on précisera le paramètre, puis calculer $E(F)$ et $V(F)$.
- 1.8** À l'aide de l'inégalité de concentration, démontrer que $P(|F - 0,08| \geq 0,02) \leq 0,368$.
- 1.9** On note $Z = 500F$ le nombre de trajets annulés parmi les 500 trajets prélevés. Préciser la loi de Z , puis justifier que l'événement $(|F - 0,08| \geq 0,02)$ est réalisé si et seulement si $Z \leq 30$ ou $Z \geq 50$.
- 1.10** En déduire la probabilité exacte de cet événement à la calculatrice. Comparer à la majoration de la question 1.8 et expliquer pourquoi l'inégalité de concentration reste néanmoins utile lorsque la valeur de p n'est pas connue.

Partie C — Combien de trajets faut-il examiner ?

La plateforme veut estimer la fréquence d'annulation sur un échantillon de taille n avec une précision de 0,01 et un risque d'erreur d'au plus 5 % : elle cherche donc le plus petit entier n pour lequel l'inégalité de concentration garantit que $P(|F_n - p| \geq 0,01) \leq 0,05$, où F_n est la fréquence observée et p la probabilité d'annulation.

```
1 def taille(eps, alpha):
2     n = ...
3     while 1/(...) > alpha:
4         n = n + 1
5     return n
```

- 1.11** En supposant $p = 0,08$, déterminer par le calcul le nombre minimal de trajets à examiner.
- 1.12** Un auditeur extérieur ignore la valeur de p . Démontrer que $p(1 - p) \leq \frac{1}{4}$ pour tout p de $[0; 1]$, puis déterminer le nombre minimal de trajets qu'il devra examiner pour la même exigence.
- 1.13** Recopier et compléter les lignes 2 et 3 de la fonction Python ci-contre pour qu'elle renvoie le nombre obtenu à la question 1.12, pour une précision eps et un risque alpha donnés.
- 1.14** Les deux réponses des questions 1.11 et 1.12 diffèrent d'un facteur proche de 3,4. Expliquer d'où vient cet écart et ce qu'il coûte concrètement à l'auditeur.

Exercice 2 Vrai ou faux

5 pts ●●○

Pour chacune des cinq affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse **en justifiant la réponse**. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

- 2.1** Une variable aléatoire X a pour espérance 10 et pour écart type 2. *Affirmation 1* : $P(6 < X < 14) \geq 0,75$.
- 2.2** Une variable aléatoire X a pour écart type $\sigma > 0$. *Affirmation 2* : appliquée avec $\varepsilon = \sigma$, l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev fournit une information utile sur la probabilité que X s'écarte de son espérance d'au moins un écart type.
- 2.3** M_n est la moyenne d'un échantillon de taille n d'une loi de variance 8. *Affirmation 3* : pour $n = 200$, on a $\sigma(M_n) = 0,2$.
- 2.4** *Affirmation 4* : l'inégalité de concentration garantit qu'un échantillon de 50 000 individus suffit pour estimer une proportion inconnue p avec une précision de 0,02 et un risque d'erreur d'au plus 1 %.
- 2.5** La variable aléatoire X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(100; 0,5)$. *Affirmation 5* : l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne $P(|X - 50| \geq 20) \leq 0,0625$, et la probabilité exacte de cet événement est nulle.