

TERMINALE SPÉCIALITÉ · MATHÉMATIQUES · PROBABILITÉS · CHAPITRE 17



R. RINGUET · 2026 – 2027

Exercices 1 Concentration et loi des grands nombres

Les bases : inégalité de Bienaymé-Tchebychev, écarts en multiples de σ , inégalité de concentration, taille d'un échantillon

9 exercices · niveau ●○○ à ●●○ · durée conseillée : 2 h · calculatrice autorisée

★ À RETENIR — Ce qu'il faut savoir faire à la fin de la feuille

- Traduire un écart à l'espérance par une valeur absolue, puis majorer sa probabilité avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev ; comparer la majoration obtenue à la probabilité exacte.
- Calculer $E(M_n)$, $V(M_n)$ et $\sigma(M_n)$ pour la moyenne d'un échantillon, puis appliquer l'inégalité de concentration.
- Déterminer une taille d'échantillon assurant une précision ε avec un risque au plus α ; énoncer et interpréter la loi des grands nombres.

■ RAPPEL — Le formulaire du chapitre

- **Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.** Si X a pour espérance μ , pour variance V et pour écart type σ , alors, pour tout réel $\varepsilon > 0$,

$$P(|X - \mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{V}{\varepsilon^2}, \quad P(\mu - \varepsilon < X < \mu + \varepsilon) \geq 1 - \frac{V}{\varepsilon^2}, \quad P(|X - \mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2} \quad (k > 0).$$

Cette majoration est *universelle* (elle vaut pour toute loi), mais elle est souvent très large.

- **Échantillon.** Un échantillon de taille n de la loi de X est une liste $(X_1; \dots; X_n)$ de variables indépendantes suivant toutes la loi de X . Avec $S_n = X_1 + \dots + X_n$ et $M_n = \frac{S_n}{n}$: $E(M_n) = \mu$, $V(M_n) = \frac{V}{n}$, $\sigma(M_n) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

- **Inégalité de concentration.** Pour tout réel $\varepsilon > 0$: $P(|M_n - \mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{V}{n\varepsilon^2}$.
- **Loi des grands nombres.** Pour tout réel $\varepsilon > 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|M_n - \mu| \geq \varepsilon) = 0$.

Exercice 1 Appliquer l'inégalité

●○○

Une variable aléatoire X a pour espérance $\mu = 20$ et pour variance $V = 9$.

- 1.1 Majorer, à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, chacune des probabilités suivantes. On donnera la valeur exacte du majorant, puis son arrondi à 10^{-3} .
a) $P(|X - 20| \geq 5)$ b) $P(|X - 20| \geq 6)$ c) $P(|X - 20| \geq 10)$ d) $P(|X - 20| \geq 2)$
- 1.2 Pour l'une des quatre probabilités précédentes, la majoration n'apporte aucune information. Laquelle, et pourquoi ?
- 1.3 En déduire une minoration de $P(15 < X < 25)$.

Exercice 2 Traduire un écart avec une valeur absolue

●○○

Une variable aléatoire Y a pour espérance 50 et pour écart type 4.

- 2.1 Donner la variance de Y .
- 2.2 Écrire à l'aide d'une valeur absolue l'événement « Y s'écarte de son espérance d'au moins 12 », puis majorer sa probabilité (arrondi à 10^{-3}).

- 2.3** Justifier que l'événement $(Y \leq 38) \cup (Y \geq 62)$ est le même que le précédent, puis minorer la probabilité $P(38 < Y < 62)$.
- 2.4** Déterminer le réel $\varepsilon > 0$ pour lequel l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev fournit exactement la majoration $P(|Y - 50| \geq \varepsilon) \leq 0,01$.

Exercice 3 L'écart type comme unité de dispersion



Une variable aléatoire X a pour espérance μ et pour écart type $\sigma > 0$.

- 3.1** En appliquant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev avec $\varepsilon = k\sigma$, où $k > 0$, démontrer que

$$P(|X - \mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}.$$

- 3.2** Compléter le tableau suivant (arrondis à 10^{-3}) et commenter le cas $k = 1$.

k	1	2	3	4
majorant de $P(X - \mu \geq k\sigma)$				

- 3.3** Application : la durée de vie, en heures, d'un composant a pour espérance $\mu = 5000$ et pour écart type $\sigma = 400$. Donner un intervalle centré en 5000 dans lequel la durée de vie se trouve avec une probabilité d'au moins 0,75.

Exercice 4 Majoration contre probabilité exacte



La variable aléatoire X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(100; 0,5)$.

- 4.1** Calculer $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$.
- 4.2** Majorer $P(|X - 50| \geq 10)$ à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
- 4.3** Justifier que $|X - 50| \geq 10$ équivaut à $X \leq 40$ ou $X \geq 60$, puis calculer la probabilité exacte de cet événement à la calculatrice (arrondi à 10^{-4}).
- 4.4** Comparer les deux résultats. L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev est-elle fautive ? Quel est son intérêt, sachant qu'ici la loi de X est parfaitement connue ?

Exercice 5 Moyenne d'un échantillon



Le nombre X de réclamations reçues en une journée par un service après-vente suit la loi donnée ci-dessous.

x_i	0	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

- 5.1** Démontrer que $E(X) = 2$ et $V(X) = 1,2$. Donner $\sigma(X)$ (arrondi à 10^{-3}).
- 5.2** On observe le service pendant 30 jours ; les nombres de réclamations $X_1, \dots, X_{30}$ forment un échantillon de taille 30 de la loi de X . On note M_{30} le nombre moyen de réclamations par jour sur cette période. Calculer $E(M_{30})$, $V(M_{30})$ et $\sigma(M_{30})$.
- 5.3** Majorer $P(|M_{30} - 2| \geq 0,5)$, puis minorer la probabilité que le nombre moyen de réclamations par jour soit strictement compris entre 1,5 et 2,5.

Exercice 6 L'inégalité de concentration



Une variable aléatoire X a pour espérance $\mu = 12$ et pour variance $V = 9$. Pour tout entier $n \geq 1$, on note M_n la moyenne d'un échantillon de taille n de la loi de X .

- 6.1** Majorer $P(|M_n - 12| \geq 1)$ pour $n = 100$, puis pour $n = 400$; majorer enfin $P(|M_{900} - 12| \geq 0,5)$ et minorer $P(11,5 < M_{900} < 12,5)$.
- 6.2** Exprimer en fonction de n le majorant de $P(|M_n - 12| \geq 0,5)$ fourni par l'inégalité de concentration, puis déterminer sa limite quand n tend vers $+\infty$. Quel théorème du cours retrouve-t-on ainsi ?

Exercice 7 Choisir la taille de l'échantillon



La masse, en grammes, d'une pièce prélevée au hasard dans une production a pour espérance μ (inconnue) et pour variance $V = 4$. On prélève au hasard n pièces, ce qui constitue un échantillon de taille n , et on note M_n la masse moyenne des n pièces prélevées.

- 7.1 Exprimer en fonction de n le majorant de $P(|M_n - \mu| \geq 0,2)$ donné par l'inégalité de concentration.
- 7.2 En déduire la plus petite taille d'échantillon pour laquelle l'inégalité de concentration garantit que $P(|M_n - \mu| \geq 0,2) \leq 0,05$.
- 7.3 Reprendre la question précédente avec la précision $\varepsilon = 0,1$ au lieu de $0,2$, le risque restant égal à $0,05$. Par quel nombre la taille de l'échantillon a-t-elle été multipliée lorsqu'on a divisé ε par 2?
- 7.4 Reprendre la question 7.2 avec le risque $\alpha = 0,01$ au lieu de $0,05$.

Exercice 8 Fréquence d'un caractère dans un sondage



Dans une population très nombreuse, une proportion inconnue p d'individus possède un certain caractère. On interroge au hasard n individus, de façon indépendante; pour $1 \leq i \leq n$, la variable X_i vaut 1 si le i -ième individu possède le caractère et 0 sinon. On note $F_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$ la fréquence observée du caractère dans l'échantillon.

- 8.1 Donner la loi de X_i , puis $E(X_i)$ et $V(X_i)$. En déduire $E(F_n)$ et $V(F_n)$.
- 8.2 Démontrer que, pour tout réel p de $[0; 1]$, $p(1-p) \leq \frac{1}{4}$.
- 8.3 En déduire que, pour tout $\varepsilon > 0$, $P(|F_n - p| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2}$: cette majoration ne dépend plus de p , qui est pourtant inconnu.
- 8.4 On choisit $\varepsilon = 0,02$. Calculer le majorant obtenu pour $n = 2500$, puis déterminer la taille minimale de l'échantillon pour laquelle cette majoration garantit $P(|F_n - p| \geq 0,02) \leq 0,05$.

Exercice 9 Des moyennes de plus en plus concentrées



On lance un dé équilibré à six faces et on note X le numéro obtenu : $E(X) = 3,5$ et $V(X) = \frac{35}{12}$. Pour $n \in \{10; 40; 160\}$, on a simulé 25 échantillons de taille n de la loi de X et représenté sur la figure 1 les 25 moyennes obtenues.

- 9.1 Calculer $\sigma(X)$, puis $\sigma(M_n)$ pour $n = 10$, $n = 40$ et $n = 160$ (arrondis à 10^{-3}).
- 9.2 Lire sur la figure 1, pour chacune des trois valeurs de n , une valeur approchée de la plus petite et de la plus grande des 25 moyennes simulées. Que constate-t-on lorsque n augmente?
- 9.3 Majorer $P(|M_n - 3,5| \geq 0,5)$ pour ces trois valeurs de n (arrondis à 10^{-3}); pour laquelle la majoration est-elle inutilisable? Pour $n = 160$, les 25 moyennes simulées sont-elles toutes comprises entre 3 et 4? Cela est-il compatible avec le majorant obtenu?
- 9.4 Énoncer la loi des grands nombres et expliquer en une phrase ce qu'illustre la figure 1.

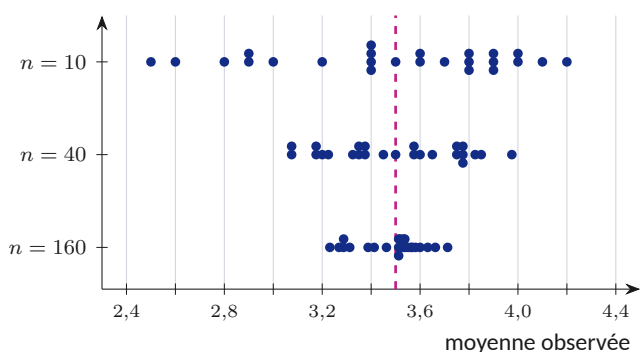


Figure 1 — 25 moyennes d'échantillons pour trois tailles n ; en pointillé, $\mu = 3,5$