

TERMINALE SPÉCIALITÉ · MATHÉMATIQUES · PROBABILITÉS · CHAPITRE 17



R. RINGUET · 2026 – 2027

Exercices 2 Concentration et loi des grands nombres

Problèmes : contrôle de masse, sondage, jeu répété, simulations Python, marche aléatoire, stabilisation d'une fréquence

8 exercices · niveau ●●○ · durée conseillée : 2 h 30 · calculatrice autorisée

★ À RETENIR — Ce qu'il faut savoir faire à la fin de la feuille

- Modéliser une situation concrète par un échantillon, puis exploiter l'inégalité de concentration : majorer un risque, minorer la probabilité d'une précision, déterminer la taille n nécessaire par une condition suffisante.
- Traiter le cas d'une fréquence observée (variables de Bernoulli) en utilisant $p(1-p) \leq \frac{1}{4}$ lorsque p est inconnu ; comparer la majoration théorique à la probabilité exacte ou à une fréquence simulée, lire ou compléter un programme Python de simulation.

Exercice 1 Des sachets de café

●●○

Une machine remplit des sachets de café. La masse, en grammes, d'un sachet prélevé au hasard dans la production est une variable aléatoire X d'espérance $\mu = 250$ et d'écart type $\sigma = 4$. On ne connaît pas la loi de X .

- 1.1 Un sachet est déclaré *non conforme* lorsque sa masse s'écarte de 250 g d'au moins 10 g. Majorer la probabilité qu'un sachet prélevé au hasard soit non conforme, puis en déduire un majorant du nombre de sachets non conformes attendus sur une production de 5 000 sachets.
- 1.2 On prélève au hasard 64 sachets dans la production, ce qui constitue un échantillon de taille 64 de la loi de X ; on note M_{64} la masse moyenne de ces 64 sachets. Calculer $E(M_{64})$ et $\sigma(M_{64})$, puis majorer $P(|M_{64} - 250| \geq 2)$.
- 1.3 Le service qualité souhaite que la masse moyenne d'un échantillon s'écarte de 250 g de moins de 1 g avec une probabilité d'au moins 0,98. Déterminer une taille d'échantillon qui garantit cette exigence, et expliquer pourquoi la réponse ne dépend pas de la loi de X , pourtant inconnue.

Exercice 2 Un sondage avant une élection

●●○

Un institut interroge n électeurs choisis au hasard et indépendamment dans un corps électoral très nombreux, dont une proportion inconnue p a l'intention de voter pour le candidat A. Pour $1 \leq i \leq n$, X_i vaut 1 si le i -ième électeur interrogé déclare voter pour A et 0 sinon, et $F_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$ est la fréquence observée.

- 2.1 Justifier que $(X_1 ; \dots ; X_n)$ est un échantillon d'une loi de Bernoulli, puis donner $E(F_n)$ et $V(F_n)$ en fonction de p et n .
- 2.2 L'institut interroge $n = 1\,000$ électeurs. Démontrer que $P(|F_{1000} - p| \geq 0,03) \leq \frac{1}{3,6}$, puis donner une valeur approchée à 10^{-3} de ce majorant.
- 2.3 On suppose maintenant, pour comparer, que $p = 0,52$. La variable $Y = 1\,000 F_{1000}$ suit alors une loi binomiale dont on précisera les paramètres. Calculer $P(|F_{1000} - 0,52| \geq 0,03)$ à la calculatrice (arrondi à 10^{-3}) et comparer au majorant de la question 2.2. Commenter.
- 2.4 L'institut veut annoncer une fréquence à 0,03 près avec un risque d'erreur d'au plus 5 %, sans rien supposer sur p . Déterminer le plus petit nombre d'électeurs à interroger pour lequel l'inégalité de concentration garantit cette exigence.

Exercice 3 Un jeu répété



Dans un jeu de hasard, le gain algébrique X (en euros) d'une partie vaut -1 avec la probabilité $\frac{2}{3}$ et 2 avec la probabilité $\frac{1}{3}$. Un joueur enchaîne n parties indépendantes; on note S_n son gain total et $M_n = \frac{S_n}{n}$ son gain moyen par partie.

- 3.1 Démontrer que $E(X) = 0$ et $V(X) = 2$. Le jeu est-il équitable ?
- 3.2 Le joueur fait 100 parties. Majorer $P(|M_{100}| \geq 0,5)$, puis en déduire une majoration de la probabilité que le gain total S_{100} s'écarte de 0 d'au moins 50 €. Reprendre avec 400 parties et un écart d'au moins 200 €.
- 3.3 Déterminer le plus petit nombre de parties pour lequel l'inégalité de concentration garantit que le gain moyen par partie s'écarte de 0 de moins de 0,10 € avec une probabilité d'au moins 0,95.
- 3.4 Un joueur affirme : « la loi des grands nombres garantit qu'en jouant très longtemps, mon gain total finira par revenir à 0 ». Expliquer pourquoi cette phrase est inexacte et énoncer correctement ce que garantit la loi des grands nombres.

Exercice 4 Simuler des échantillons en Python



On lance un dé équilibré à six faces et on note X le numéro obtenu : $E(X) = 3,5$ et $V(X) = \frac{35}{12}$, d'où $\sigma = \sigma(X) \approx 1,708$. Le programme ci-contre simule N échantillons de taille n de la loi de X et renvoie la proportion de ceux dont la moyenne s'écarte de $3,5$ de moins de $k \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

- 4.1 Expliquer ce que renvoie la fonction `moyenne(n)`, puis recopier et compléter les lignes 4 et 16 du programme.
- 4.2 Justifier que l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev appliquée à M_n donne $P(|M_n - 3,5| < k \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$, et calculer ce minorant pour $k = 1$, $k = 2$ et $k = 3$.
- 4.3 Le tableau ci-dessous donne les résultats obtenus avec $N = 10\,000$. Comparer, pour chaque k , les valeurs observées au minorant précédent; dépendent-elles beaucoup de n ? En quoi ce constat illustre-t-il que la majoration de Bienaymé-Tchebychev est universelle mais grossière ?

```

1 from random import randint
2 from math import sqrt
3
4 sigma = sqrt(...)
5
6 def moyenne(n):
7     s = 0
8     for i in range(n):
9         s = s + randint(1, 6)
10    return s / n
11
12 def proportion(N, n, k):
13     c = 0
14     d = k*sigma/sqrt(n)
15     for j in range(N):
16         if abs(... - 3.5) < d:
17             c = c + 1
18    return c / N

```

	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$
$n = 30$	0,692	0,955	0,998
$n = 100$	0,695	0,957	0,998

Exercice 5 Contrôle d'une production



Une usine produit des composants électroniques; chacun est défectueux avec la probabilité $p = 0,05$, indépendamment des autres. On prélève au hasard n composants, on note X_n le nombre de défectueux prélevés et $F_n = \frac{X_n}{n}$ leur fréquence dans le prélèvement.

- 5.1 Préciser la loi de X_n , justifier que F_n est la moyenne d'un échantillon de taille n d'une loi de Bernoulli, puis donner $E(F_n)$ et $V(F_n)$.
- 5.2 On prélève $n = 500$ composants. Majorer $P(|F_{500} - 0,05| \geq 0,02)$, puis calculer la probabilité exacte de cet événement avec la loi binomiale (arrondis à 10^{-3}). Commenter.
- 5.3 L'usine souhaite que la fréquence observée s'écarte de 0,05 de moins de 0,01 avec une probabilité d'au moins 0,95. Déterminer le plus petit nombre de composants à prélever pour lequel l'inégalité de concentration garantit cette exigence, puis la taille qu'obtiendrait un contrôleur extérieur qui, ignorant p , utilise la majoration $p(1-p) \leq \frac{1}{4}$. Commenter.

Exercice 6 Une marche aléatoire



Un pion part de l'origine d'un axe gradué. À chaque étape, il avance de 1 ou recule de 1 avec la probabilité 0,5, indépendamment des étapes précédentes. Pour $1 \leq i \leq n$, on note D_i le déplacement de la i -ième étape ($D_i = 1$ ou $D_i = -1$) et $S_n = D_1 + \dots + D_n$ l'abscisse du pion après n étapes. La figure 1 représente une marche simulée sur 60 étapes.

- 6.1 Démontrer que $E(D_i) = 0$ et $V(D_i) = 1$, puis en déduire $E(S_n)$ et $V(S_n)$.
- 6.2 Majorer $P(|S_{100}| \geq 20)$, puis $P(|S_{400}| \geq 40)$. Que remarque-t-on ? Interpréter à l'aide de $\sigma(S_n) = \sqrt{n}$.
- 6.3 Lire sur la figure 1 l'abscisse maximale et l'abscisse minimale atteintes. L'événement $(|S_{60}| \geq 10)$ s'est-il réalisé ? Majorer sa probabilité.
- 6.4 On note $M_n = \frac{S_n}{n}$ le déplacement moyen par étape. Majorer $P(|M_n| \geq 0,05)$ en fonction de n , puis déterminer le nombre d'étapes rendant cette majoration inférieure ou égale à 0,02. Quel théorème illustre-t-on ?

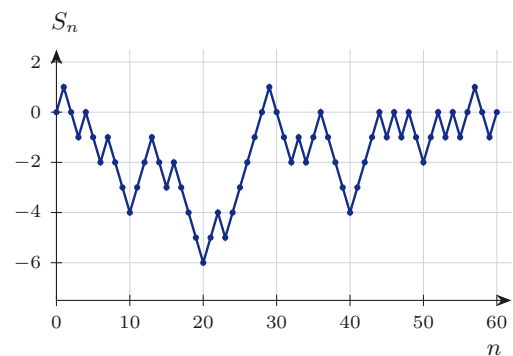


Figure 1 — Une marche aléatoire de 60 étapes

Exercice 7 La fréquence se stabilise-t-elle ?



On lance 500 fois une pièce équilibrée. Pour $1 \leq n \leq 500$, on note f_n la fréquence de Pile observée sur les n premiers lancers ; la figure 2 représente f_n en fonction de n , pour $n \geq 5$, sur une série de lancers simulée.

- 7.1 Lire sur la figure 2 des valeurs approchées de f_{50} , f_{100} et f_{500} , puis décrire l'évolution de f_n .
- 7.2 Justifier que f_n est une réalisation de la moyenne F_n d'un échantillon de taille n d'une loi de Bernoulli de paramètre 0,5 ; donner $E(F_n)$ et $V(F_n)$.
- 7.3 À l'aide de l'inégalité de concentration, majorer $P(|F_{100} - 0,5| \geq 0,05)$, puis $P(|F_{500} - 0,5| \geq 0,05)$. La première majoration est-elle exploitable ?
- 7.4 Calculer la valeur exacte de $P(|F_{500} - 0,5| \geq 0,05)$ à la calculatrice, à l'aide de la loi binomiale (arrondi à 10^{-3}), et la comparer au majorant précédent.
- 7.5 Déterminer le plus petit nombre n de lancers pour lequel l'inégalité de concentration garantit que l'on a $P(|F_n - 0,5| \geq 0,05) \leq 0,01$.

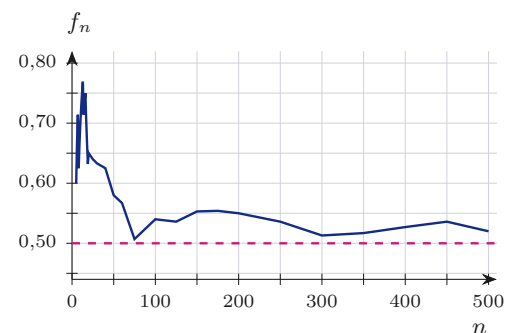


Figure 2 — Fréquence de Pile au fil des lancers

Exercice 8 Vrai ou faux ?



Pour chacune des quatre affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse.

- 8.1 Une variable aléatoire X a pour espérance μ et pour variance $V = 0,01$; alors $P(|X - \mu| \geq 0,5) \leq 0,04$.
- 8.2 Pour estimer une proportion inconnue p avec un risque fixé, diviser par 10 la valeur de la précision ε demandée revient à multiplier par 10 la taille de l'échantillon nécessaire.
- 8.3 L'inégalité de concentration assure que, pour n assez grand, la moyenne M_n d'un échantillon est égale à μ .
- 8.4 Pour la fréquence F_{400} d'un caractère observée sur un échantillon de taille 400, on a toujours $P(|F_{400} - p| \geq 0,1) \leq 0,0625$, quelle que soit la proportion p du caractère dans la population.