

TERMINALE SPÉCIALITÉ · MATHÉMATIQUES · PROBABILITÉS · CHAPITRE 17



R. RINGUET · 2026 – 2027

Contrôle B Concentration et loi des grands nombres

Cours et automatismes, surréservation d'un vol, borne de recharge, estimation d'une probabilité inconnue

Durée : 1 h · calculatrice autorisée · 4 exercices indépendants · barème sur 20

Nom : Prénom : Classe : Note : / 20

★ CONSIGNES

Chaque application de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev ou de l'inégalité de concentration devra être rédigée : on précisera la variable aléatoire utilisée, son espérance, sa variance et la valeur de ε choisie. Les probabilités seront arrondies à 10^{-4} sauf mention contraire, et l'on indiquera le calcul effectué lorsqu'on utilise la calculatrice. La qualité de la rédaction et la précision des raisonnements sont prises en compte dans la notation.

Exercice 1 Cours et automatismes

4 pts ●○○

- 1.1 Énoncer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, puis l'inégalité de concentration, en précisant à chaque fois les hypothèses et la signification de chaque notation.
- 1.2 Une variable aléatoire X a pour espérance μ et pour variance 2,5. Majorer $P(|X - \mu| \geq 5)$.
- 1.3 M_{250} est la moyenne d'un échantillon de taille 250 d'une loi de variance 10. Donner $V(M_{250})$ et $\sigma(M_{250})$ (arrondi à 10^{-3}).
- 1.4 Une variable aléatoire suit une loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0; 1]$. Quelle est la plus grande valeur possible de sa variance, et pour quelle valeur de p est-elle atteinte ? Justifier.
- 1.5 Énoncer la loi des grands nombres, puis expliquer en une ou deux phrases ce qu'elle signifie pour la fréquence d'un caractère observée dans un échantillon.

Exercice 2 Surréservation d'un vol

6 pts ●●●

Une compagnie aérienne exploite un avion de 240 places. Elle constate qu'un passager ayant réservé se présente à l'embarquement avec la probabilité 0,9, indépendamment des autres passagers. Pour un vol donné, elle accepte 250 réservations et on note X le nombre de passagers qui se présentent à l'embarquement.

- 2.1 Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres, puis calculer $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$ (arrondi à 10^{-3}).
- 2.2 Majorer $P(|X - 225| \geq 15)$ à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, puis calculer la probabilité exacte de cet événement à la calculatrice. Comparer et commenter.
- 2.3 Tous les passagers qui se présentent peuvent embarquer si et seulement si au plus 240 d'entre eux se présentent. Justifier que l'événement $(X \geq 241)$ est inclus dans l'événement $(|X - 225| \geq 16)$, puis en déduire une majoration de la probabilité qu'au moins un passager ne puisse pas embarquer.
- 2.4 Calculer la valeur exacte de $P(X \geq 241)$ (arrondi à 10^{-5}). La majoration précédente donne-t-elle une bonne idée du risque réel ? Expliquer pourquoi l'écart est ici particulièrement grand.
- 2.5 Le directeur commercial propose d'accepter 260 réservations. Sans calculer de probabilité binomiale, majorer à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev la probabilité qu'au moins un passager ne puisse pas embarquer dans ce nouveau scénario.

Exercice 3 Une borne de recharge

6 pts ●●●○

Une borne de recharge pour véhicules électriques comporte trois emplacements. Le nombre X d'emplacements occupés à un instant choisi au hasard dans la journée suit la loi donnée par le tableau ci-dessous, représentée sur la figure 1.

x_i	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	0,1	0,3	0,4	0,2

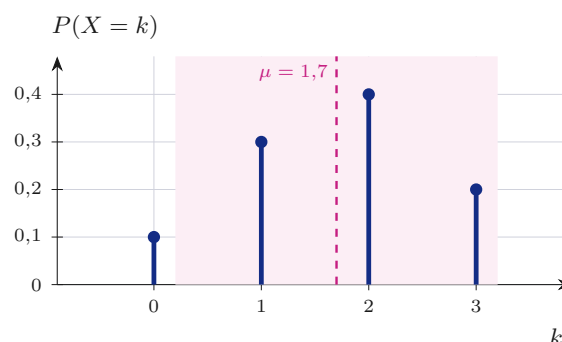


Figure 1 — La loi de X ; en rose, l'intervalle $]\mu - 1,5 ; \mu + 1,5[$

- 3.1 Démontrer que $E(X) = 1,7$ et $V(X) = 0,81$, puis donner $\sigma(X)$.
- 3.2 Majorer $P(|X - 1,7| \geq 1,5)$ à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, puis calculer la probabilité exacte de cet événement à partir du tableau. Commenter.
- 3.3 L'exploitant relève le nombre d'emplacements occupés à 100 instants choisis au hasard et indépendamment : on obtient ainsi un échantillon de taille 100 de la loi de X , de moyenne M_{100} . Calculer $E(M_{100})$ et $\sigma(M_{100})$, puis majorer $P(|M_{100} - 1,7| \geq 0,3)$.
- 3.4 L'exploitant souhaite que la moyenne relevée s'écarte de 1,7 de moins de 0,1 avec un risque d'erreur d'au plus 1 %. Déterminer le plus petit nombre de relevés pour lequel l'inégalité de concentration garantit cette exigence.
- 3.5 Expliquer, en citant le théorème du cours concerné, pourquoi il est possible d'obtenir une précision aussi grande que l'on veut en augmentant le nombre de relevés.

Exercice 4 Estimer la probabilité d'un événement

4 pts ●●●○

On lance une punaise sur une table : elle retombe soit la pointe en l'air, soit la pointe sur le côté. La probabilité p qu'elle retombe la pointe en l'air est inconnue. On effectue n lancers indépendants et on note F_n la fréquence observée des lancers où la pointe est en l'air.

- 4.1 Justifier que F_n est la moyenne d'un échantillon de taille n d'une loi de Bernoulli, puis démontrer que, pour tout $\varepsilon > 0$,
$$P(|F_n - p| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2}.$$
- 4.2 Déterminer le plus petit nombre de lancers pour lequel la majoration de la question 4.1 garantit une précision de 0,01 avec un risque d'erreur d'au plus 5 %.
- 4.3 Un élève ne dispose que du temps nécessaire à 1 000 lancers. Quelle précision cette majoration lui permet-elle de garantir avec un risque d'au plus 5 % ? On donnera la valeur exacte, puis un arrondi à 10^{-3} .
- 4.4 Recopier et compléter les lignes 4 et 6 du programme ci-contre, qui simule n lancers d'une punaise pour laquelle $p = 0,4$ et renvoie la fréquence observée.

```

1 from random import random
2
3 def frequence(n):
4     c = ...
5     for i in range(n):
6         if random() < ... :
7             c = c + 1
8     return c / n

```