

TERMINALE SPÉCIALITÉ · MATHÉMATIQUES · PROBABILITÉS · CHAPITRE 17



R. RINGUET · 2026 – 2027

Contrôle A

Concentration et loi des grands nombres
QCM, temps d'attente à un guichet, contrôle de qualité, sondage et algorithme
Python

Durée : 1 h · calculatrice autorisée · 4 exercices indépendants · barème sur 20

Nom : Prénom : Classe : Note : / 20

★ CONSIGNES

Chaque application de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev ou de l'inégalité de concentration devra être rédigée : on précisera la variable aléatoire utilisée, son espérance, sa variance et la valeur de ε choisie. Les probabilités seront arrondies à 10^{-3} sauf mention contraire, et l'on indiquera le calcul effectué lorsqu'on utilise la calculatrice. Les réponses du QCM ne demandent aucune justification. La qualité de la rédaction est prise en compte dans la notation.

Exercice 1 Questionnaire à choix multiples

5 pts ●○○

Pour chacune des cinq questions, **une seule** des quatre réponses proposées est exacte. Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte un point ; une réponse fausse ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

- 1.1** Une variable aléatoire X a pour espérance 30 et pour variance 16. Le majorant de $P(|X - 30| \geq 8)$ fourni par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev est :
- a) 0,062 5 b) 0,25 c) 0,5 d) 2
- 1.2** Une variable aléatoire X a pour espérance μ et pour écart type $\sigma > 0$. Le majorant de $P(|X - \mu| \geq 3\sigma)$ fourni par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev est :
- a) $\frac{1}{9}$ b) $\frac{1}{3}$ c) 3 d) 9
- 1.3** M_{100} est la moyenne d'un échantillon de taille 100 d'une loi de variance 25. Alors $\sigma(M_{100})$ vaut :
- a) 0,25 b) 0,5 c) 2,5 d) 5
- 1.4** Une loi a pour variance $V = 9$. La plus petite taille n d'échantillon pour laquelle l'inégalité de concentration garantit $P(|M_n - \mu| \geq 0,3) \leq 0,05$ est :
- a) 200 b) 600 c) 2 000 d) 6 000
- 1.5** F_{900} est la fréquence d'un caractère observée sur un échantillon de taille 900, la proportion p de ce caractère dans la population étant inconnue. Le majorant de $P(|F_{900} - p| \geq 0,05)$ que fournit l'inégalité de concentration, valable quelle que soit la valeur de p , est, à 10^{-3} près :
- a) 0,028 b) 0,111 c) 0,25 d) 0,444

Exercice 2 Le temps d'attente à un guichet

5 pts ●●○

Le temps d'attente, en minutes, d'un usager se présentant au guichet d'une administration est une variable aléatoire T d'espérance $\mu = 8$ et d'écart type $\sigma = 3$. La loi de T n'est pas connue.

- 2.1** Donner la variance de T , puis majorer la probabilité que le temps d'attente d'un usager s'écarte de 8 minutes d'au moins 6 minutes.
- 2.2** En déduire une minoration de $P(2 < T < 14)$, et interpréter ce résultat par une phrase.

- 2.3** On observe 36 usagers choisis au hasard parmi ceux qui se présentent au guichet sur plusieurs semaines ; leurs temps d'attente $T_1, \dots, T_{36}$ forment un échantillon de taille 36 de la loi de T et on note M_{36} leur temps d'attente moyen. Calculer $E(M_{36})$ et $\sigma(M_{36})$.
- 2.4** Majorer $P(|M_{36} - 8| \geq 1,5)$ (arrondi à 10^{-3}).
- 2.5** L'administration souhaite que le temps d'attente moyen d'un échantillon d'usagers s'écarte de 8 minutes de moins de 30 secondes, avec un risque d'erreur d'au plus 4 %. Déterminer le plus petit nombre d'usagers à observer pour lequel l'inégalité de concentration garantit cette exigence.

Exercice 3 Un contrôle de qualité

6 pts ●●○

Dans une chaîne de production, chaque pièce est défectueuse avec la probabilité 0,1, indépendamment des autres. Un technicien prélève au hasard 200 pièces dans la production ; celle-ci est suffisamment importante pour que ce prélèvement soit assimilé à un tirage avec remise. On note X le nombre de pièces défectueuses prélevées.

- 3.1** Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres, puis calculer $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$ (arrondi à 10^{-3}).
- 3.2** À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, majorer $P(|X - 20| \geq 10)$.
- 3.3** Justifier que l'événement $(|X - 20| \geq 10)$ est réalisé si et seulement si $X \leq 10$ ou $X \geq 30$, puis calculer sa probabilité exacte à la calculatrice (arrondi à 10^{-3}).
- 3.4** Comparer les deux résultats précédents. L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev est-elle mise en défaut ? Dans quelle situation cette inégalité devient-elle réellement utile ?
- 3.5** On note $F = \frac{X}{200}$ la fréquence de pièces défectueuses dans le prélèvement. Justifier que F est la moyenne d'un échantillon de taille 200 d'une loi de Bernoulli, puis donner $E(F)$ et $V(F)$.
- 3.6** En déduire, à l'aide de l'inégalité de concentration, une majoration de $P(|F - 0,1| \geq 0,05)$ et comparer avec la réponse de la question 3.2. Expliquer ce que l'on observe.

Exercice 4 Un sondage

4 pts ●●○

Un institut interroge au hasard, de façon indépendante, n personnes d'une population très nombreuse, dont une proportion inconnue p pratique régulièrement un sport. Il note F_n la fréquence de sportifs réguliers observée dans l'échantillon ; F_n est la moyenne d'un échantillon de taille n d'une loi de Bernoulli de paramètre p .

- 4.1** Donner $E(F_n)$ et $V(F_n)$, puis justifier que, pour tout $\varepsilon > 0$, $P(|F_n - p| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2}$. On admettra que $p(1-p) \leq \frac{1}{4}$.
- 4.2** L'institut interroge 2 500 personnes. Majorer la probabilité $P(|F_{2500} - p| \geq 0,025)$.
- 4.3** Déterminer le plus petit nombre de personnes à interroger pour lequel la majoration de la question 4.1 garantit une précision de 0,025 avec un risque d'erreur d'au plus 2 %.
- 4.4** Recopier et compléter les lignes 2 et 3 de la fonction Python ci-contre pour qu'elle renvoie, pour une précision ε et un risque α donnés, la taille d'échantillon déterminée comme à la question précédente.

```

1 def taille(eps, alpha):
2     n = ...
3     while 1/(...) > alpha:
4         n = n + 1
5     return n

```