

TERMINALE SPÉCIALITÉ · MATHÉMATIQUES · ANALYSE · CHAPITRE 5

Sujet type bac Compléments sur la dérivation

Étude d'une fonction composée en contexte, optimisation — QCM

Durée : 1 h 30 · calculatrice autorisée · 2 exercices indépendants · barème sur 12



R. RINGUET · 2026 – 2027

Nom : Prénom : Classe : Note : / 12

★ CONSIGNES

Deux exercices indépendants, notés comme à l'épreuve écrite du baccalauréat (7 points et 5 points). La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements sont prises en compte. Tout calcul de dérivée doit être justifié et toute limite doit être démontrée.

Exercice 1 La crue d'une rivière

7 pts ●●●○

Après un orage, le débit d'une rivière augmente puis revient progressivement à sa valeur habituelle. On appelle *débit supplémentaire* l'écart entre le débit observé et le débit habituel ; exprimé en $\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$, il est modélisé t heures après la fin des pluies par $D(t) = f(t)$, où f est définie sur $[0 ; +\infty[$ par

$$f(x) = 10x e^{-0,5x^2}.$$

Partie A — Étude de la fonction f

- 1.1** Calculer $f(0)$ et justifier que, pour tout réel $x \geq 0$, $f(x) \geq 0$.
- 1.2** Justifier que $0 \leq f(x) \leq 10x e^{-0,5x}$ pour tout $x \geq 1$. En posant $X = 0,5x$ et en utilisant une croissance comparée, déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} 10x e^{-0,5x}$, puis en déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et l'asymptote correspondante.
- 1.3** Montrer que, pour tout réel $x \geq 0$, $f'(x) = 10(1 - x^2) e^{-0,5x^2}$. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[0 ; +\infty[$, puis dresser le tableau de variations complet de f (limite comprise). On donnera la valeur exacte du maximum de f , puis sa valeur arrondie à 10^{-2} .
- 1.4** Déterminer une équation de la tangente T à la courbe de f en 0, puis démontrer que $f(x) \leq 10x$ pour tout $x \geq 0$ et en déduire la position de la courbe de f par rapport à T .

Partie B — Retour au contexte

La figure 1 représente la courbe de D sur $[0 ; 5]$ et la droite Δ d'équation $y = 3$.

- 1.5** À quel instant le débit supplémentaire est-il maximal ? Quelle est alors sa valeur, arrondie à 10^{-2} ?
- 1.6** La rivière déborde lorsque le débit supplémentaire dépasse $3 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$.
- Par lecture graphique, donner un encadrement d'amplitude 0,5 de chacun des deux instants où le débit supplémentaire vaut exactement $3 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$.
 - Par balayage à la calculatrice, déterminer chacun de ces deux instants à 10^{-2} près, puis en déduire un encadrement de la durée du débordement.
- 1.7** Interpréter, dans le contexte de l'exercice, la limite obtenue à la question 1.2.

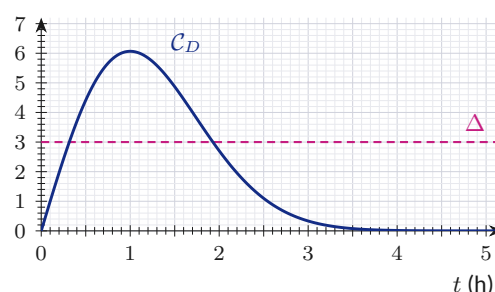


Figure 1 — Débit supplémentaire $D(t)$, en $\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$, et droite Δ

Partie C — Un réservoir de rétention

Pour limiter les débordements, la commune fait construire un réservoir à ciel ouvert (donc sans couvercle), de forme parallélépipédique à base carrée, de volume 750 m^3 . On note x le côté de la base et h la hauteur, exprimés en mètres. Le fond coûte 300 € par mètre carré, et chacune des quatre parois verticales 200 € par mètre carré.

- 1.8** Exprimer h en fonction de x , puis montrer que le coût total de construction, en euros, est, pour $x > 0$,

$$C(x) = 300x^2 + \frac{600\,000}{x}.$$

- 1.9** Montrer que, pour tout $x > 0$, $C'(x) = \frac{600(x^3 - 1000)}{x^2}$. Étudier le signe de $C'(x)$, puis dresser le tableau de variations de C sur $]0; +\infty[$ (limites comprises).

- 1.10** En déduire les dimensions du réservoir le moins coûteux, ainsi que ce coût minimal.

Partie D — Comparaison avec un second modèle

Un hydrologue propose, pour le même orage, un second modèle : le débit supplémentaire, en $\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$, serait alors $G(t) = 18t e^{-t}$ pour $t \geq 0$; on admet que $G(t)$ tend vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$.

- 1.11** Montrer que $G'(t) = 18(1 - t) e^{-t}$, puis dresser le tableau de variations de G sur $[0; +\infty[$ (limite comprise).

- 1.12** Lequel des deux modèles prévoit le plus fort débit supplémentaire, et à quel instant? Lequel prévoit le retour à la normale le plus lent? On justifiera cette seconde réponse en comparant $D(5)$ et $G(5)$.

- 1.13** La fonction `duree` ci-contre renvoie une valeur approchée, au pas de 0,01, de la durée pendant laquelle le débit supplémentaire du premier modèle dépasse un seuil s . Expliquer le rôle de la variable d , donner la valeur renvoyée par `duree(3)` et la comparer au résultat de la question 1.6, puis indiquer comment modifier ce programme pour traiter le second modèle.

```
1 from math import exp
2 def D(t):
3     return 10*t*exp(-0.5*t*t)
4 def duree(s):
5     t, d = 0, 0
6     while t <= 10:
7         if D(t) > s:
8             d = d + 0.01
9             t = t + 0.01
10    return d
```

Exercice 2 Questionnaire à choix multiples

5 pts ●●○

Pour chacune des cinq questions suivantes, **une seule** des quatre réponses proposées est exacte. Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte un point; une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

- 2.1** La dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-x^2+3x}$ est la fonction :

- a) $x \mapsto (-2x + 3) e^{-x^2+3x}$ b) $x \mapsto e^{-2x+3}$
c) $x \mapsto (-2x + 3) e^{-2x+3}$ d) $x \mapsto -2x e^{-x^2+3x}$

- 2.2** Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{x^2 + 3}$. Alors $f'(1)$ est égal à :

- a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{1}{2}$ c) 1 d) 2

- 2.3** La dérivée de la fonction f définie sur $]0,5; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{(2x-1)^3}$ est la fonction :

- a) $x \mapsto \frac{-3}{(2x-1)^4}$ b) $x \mapsto \frac{-6}{(2x-1)^4}$ c) $x \mapsto \frac{-6}{(2x-1)^2}$ d) $x \mapsto \frac{6}{(2x-1)^4}$

- 2.4** Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(1-2x)$. Alors :

- a) $g'(x) = f'(1-2x)$ b) $g'(x) = 2f'(1-2x)$
c) $g'(x) = -2f'(1-2x)$ d) $g'(x) = -2f'(x)$

- 2.5** La dérivée seconde de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x e^x$ est la fonction :

- a) $x \mapsto e^x$ b) $x \mapsto x e^x$ c) $x \mapsto (1+x) e^x$ d) $x \mapsto (2+x) e^x$