

TERMINALE SPÉCIALITÉ · MATHÉMATIQUES · ANALYSE · CHAPITRE 5



R. RINGUET · 2026 – 2027

Exercices 1 Compléments sur la dérivation

Les bases : reconnaître une composée, dériver une composée, dérivée seconde

8 exercices · niveau ●○○ à ●●○ · durée conseillée : 2 h · calculatrice autorisée

★ À RETENIR — Ce qu'il faut savoir faire à la fin de la feuille

- Reconnaître une fonction composée $v \circ u$, la décomposer, déterminer son ensemble de définition.
- Dériver e^u , u^n (n entier relatif), $\sqrt{u}$, $x \mapsto f(ax + b)$; déterminer une équation de tangente; calculer une dérivée seconde et l'interpréter comme une accélération.

■ RAPPEL — Le formulaire du chapitre

- Composée.** Si u est définie sur I à valeurs dans J et si v est définie sur J , la fonction $v \circ u$ est définie sur I par $(v \circ u)(x) = v(u(x))$. En général $v \circ u \neq u \circ v$.
- Dérivée d'une composée.** Si u est dérivable sur I et v dérivable sur J , alors $v \circ u$ est dérivable sur I et $(v \circ u)' = (v' \circ u) \times u'$, c'est-à-dire $[v(u(x))]' = u'(x) \times v'(u(x))$.
- Cas usuels** (u dérivable sur I) : $(e^u)' = u' e^u$; $(u^n)' = n u' u^{n-1}$ pour $n \in \mathbb{Z}^*$ (u ne s'annulant pas si $n < 0$); $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$ si $u > 0$; $[f(ax + b)]' = a f'(ax + b)$.
- Rappels** : $(\frac{1}{x})' = -\frac{1}{x^2}$, $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. **Dérivée seconde** : $f'' = (f')'$; si $f(t)$ est une position, $f'(t)$ est la vitesse et $f''(t)$ l'accélération.

Exercice 1 Reconnaître une composée

●○○

Déterminer deux fonctions u et v telles que $f = v \circ u$, puis l'ensemble de définition de f (à justifier pour c), d) et f)).

- a) $f(x) = (3x + 1)^5$ b) $f(x) = e^{x^2-4}$ c) $f(x) = \sqrt{2x-6}$
 d) $f(x) = \frac{1}{(x^2+1)^3}$ e) $f(x) = \cos(4x - \frac{\pi}{3})$ f) $f(x) = \sqrt{9-x^2}$

Exercice 2 Composer dans un sens, puis dans l'autre

●○○

- 2.1** On pose $u(x) = 2x - 3$ et $v(x) = x^2$, toutes deux définies sur $\mathbb{R}$. Exprimer $(v \circ u)(x)$ et $(u \circ v)(x)$, puis calculer $(v \circ u)(4)$ et $(u \circ v)(4)$. Les fonctions $v \circ u$ et $u \circ v$ sont-elles égales ?
- 2.2** On pose $u(x) = x^2 + 1$ sur $\mathbb{R}$ et $v(x) = \sqrt{x}$ sur $[0; +\infty[$. Justifier que $v \circ u$ est définie sur $\mathbb{R}$ et donner son expression, puis l'ensemble de définition de $u \circ v$ et une expression simplifiée de $(u \circ v)(x)$.

Exercice 3 Dériver e^u , u^n et $\sqrt{u}$

●○○

Dériver chaque fonction sur l'intervalle indiqué (sur $\mathbb{R}$ si rien n'est précisé); dans la liste 3.2, écrire d'abord d), e) et f) sous la forme u^n , n entier négatif.

- 3.1** a) $f(x) = e^{3x+2}$ b) $f(x) = e^{x^2}$ c) $f(x) = e^{-x^2+4x}$
 d) $f(x) = 5e^{-0,2x}$ e) $f(x) = xe^{2x}$ f) $f(x) = e^{1/x}$, $x > 0$
- 3.2** a) $f(x) = (4x - 1)^3$ b) $f(x) = (x^2 + x)^4$ c) $f(x) = (3 - 2x)^5$
 d) $f(x) = \frac{1}{(x+2)^3}$, $x > -2$ e) $f(x) = \frac{1}{(x^2+1)^2}$ f) $f(x) = \frac{1}{2x-5}$, $x > 2,5$
- 3.3** a) $f(x) = \sqrt{3x+7}$, $x > -\frac{7}{3}$ b) $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ c) $f(x) = \sqrt{4-x^2}$, $|x| < 2$

3.4 Expliquer pourquoi la fonction $x \mapsto \sqrt{3x+7}$ est définie en $-\frac{7}{3}$, mais n'y est pas dérivable.

Exercice 4 Dériver $x \mapsto f(ax+b)$

●○○

4.1 Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f(3) = 2$ et $f'(3) = -5$. On pose $g(x) = f(2x+1)$. Calculer $g(1)$ et $g'(1)$.

4.2 Déterminer la fonction dérivée de chacune des fonctions suivantes.

a) $f(x) = \frac{1}{3x+2}, x > -\frac{2}{3}$

b) $f(x) = \left(\frac{x}{2} + 1\right)^6$

c) $f(x) = 4e^{0,5x}$

d) $f(x) = e^{-2x+1}$

e) $f(x) = (1-3x)^4$

f) $f(x) = \sqrt{5-2x}, x < 2,5$

Exercice 5 Trois tangentes

●●○

Dans chaque cas, déterminer une équation de la tangente à la courbe de la fonction au point d'abscisse a .

5.1 $f(x) = (2x-3)^4$ sur $\mathbb{R}$, avec $a = 2$.

5.2 $g(x) = e^{3x-6}$ sur $\mathbb{R}$, avec $a = 2$.

5.3 $h(x) = \sqrt{x^2+9}$ sur $\mathbb{R}$, avec $a = 4$. Vérifier le résultat obtenu sur la figure 1, où sont tracées la courbe C_h et la tangente cherchée.

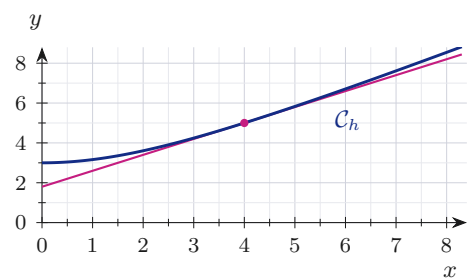


Figure 1 — Courbe de h et sa tangente en $x = 4$

Exercice 6 Dérivée seconde

●●○

6.1 Calculer $f'(x)$ puis $f''(x)$ dans chacun des cas suivants (sur $]-\frac{1}{2}; +\infty[$ pour d).

a) $f(x) = (3x-1)^4$

b) $f(x) = e^{-2x}$

c) $f(x) = xe^x$

d) $f(x) = \sqrt{2x+1}$

6.2 La position d'un chariot sur un rail, en mètres à l'instant t en secondes, est $d(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$ pour $t \in [0; 5]$. Calculer la vitesse $v(t) = d'(t)$ et l'accélération $a(t) = d''(t)$, puis déterminer les instants où v s'annule et celui où a s'annule (donner alors la vitesse).

Exercice 7 Une étude de variations

●●○

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x^2 - 3)e^{-x}$.

7.1 Montrer que $f'(x) = (-x^2 + 2x + 3)e^{-x} = -(x+1)(x-3)e^{-x}$, puis étudier son signe sur $\mathbb{R}$.

7.2 Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ (on pourra écrire $f(x) = \frac{x^2}{e^x} - \frac{3}{e^x}$); on admet que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$. Recopier et compléter le tableau ci-dessous, en donnant les valeurs exactes de $f(-1)$ et $f(3)$ puis leurs arrondis à 10^{-2} .

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$
$f'(x)$				
$f(x)$				

Tableau 1 — Tableau de variations à compléter

Exercice 8 Vrai ou faux?

●●○

Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse (un contre-exemple suffit pour réfuter).

a) La dérivée de $x \mapsto (5x+2)^3$ est $x \mapsto 3(5x+2)^2$. b) Si u est dérivable sur I , alors $\sqrt{u}$ l'est aussi.

c) La dérivée de $x \mapsto e^{-x^2}$ est négative sur $\mathbb{R}$.

d) Si $f''(x) > 0$ sur I , alors f' est croissante sur I .