

TERMINALE SPÉCIALITÉ · MATHÉMATIQUES · ANALYSE · CHAPITRE 5

Contrôle B

Compléments sur la dérivation

Vrai ou faux, dérivées composées, étude complète, optimisation d'un coût

Durée : 1 h · calculatrice autorisée · 4 exercices indépendants · barème sur 20



R. RINGUET · 2026 – 2027

Nom : Prénom : Classe : Note : /20

★ CONSIGNES

Tout calcul de dérivée doit être justifié (formule utilisée, fonction u choisie, calcul de u') et les tableaux de variations doivent être complets. Une affirmation déclarée fausse doit être réfutée par un contre-exemple explicite ou par un calcul. La qualité de la rédaction est prise en compte dans la notation.

Exercice 1 Vrai ou faux ?

4 pts ●●○

Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse et **justifier** la réponse. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

- 1.1 Affirmation :** « si f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et si $f'(2) = 0$, alors f admet un extremum local en 2 ».
- 1.2 Affirmation :** « la fonction g définie sur $[1; +\infty[$ par $g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ est dérivable en 1 ».
- 1.3 Affirmation :** « si u est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $u(3) = 2$ et $u'(3) = 4$, alors la fonction e^u a pour nombre dérivé $4e^2$ en 3 ».
- 1.4 Affirmation :** « la dérivée seconde de la fonction $x \mapsto e^{-0,5x}$ est la fonction $x \mapsto 0,25 e^{-0,5x}$ ».

Exercice 2 Dérivées et tangentes

4 pts ●●○

- 2.1** Déterminer la fonction dérivée de chacune des fonctions suivantes sur l'intervalle indiqué.
- a) $f(x) = (x^2 - 4x)^3$ sur $\mathbb{R}$ b) $g(x) = \sqrt{1 + e^{2x}}$ sur $\mathbb{R}$
- c) $h(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+3}}$ sur $] -1,5; +\infty[$ d) $k(x) = x^2 \sqrt{1-x}$ sur $] -\infty; 1[$
- 2.2** Déterminer une équation de la tangente à la courbe de g au point d'abscisse 0.
- 2.3** Déterminer les abscisses des points de la courbe de f en lesquels la tangente est horizontale.

Exercice 3 Une courbe en cloche

7 pts ●●●

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-x^2/2}$. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

- 3.1** Démontrer que f est paire et interpréter ce résultat graphiquement.
- 3.2** Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ puis $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ par composition de limites. En déduire une asymptote à $\mathcal{C}_f$.
- 3.3** Montrer que, pour tout réel x , $f'(x) = -x e^{-x^2/2}$, puis dresser le tableau de variations complet de f (limites comprises) en précisant la valeur du maximum.
- 3.4** Montrer qu'une équation de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1 est $y = e^{-0,5} (2 - x)$. En quel point T coupe-t-elle l'axe des abscisses ?
- 3.5** Montrer que, pour tout réel x , $f''(x) = (x^2 - 1) e^{-x^2/2}$. On admet que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$: dresser le tableau de variations de f' sur $\mathbb{R}$. En déduire le plus petit coefficient directeur possible pour une tangente à $\mathcal{C}_f$ (valeur exacte, puis arrondie à 10^{-3}) et l'abscisse du point de contact correspondant.

- 3.6** Par balayage à la calculatrice, donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} de la solution positive de l'équation $f(x) = 0,5$. En utilisant la question 3.1, en déduire l'ensemble des solutions de cette équation sur $\mathbb{R}$.
- 3.7** Calculer $f(1)$, $f(2)$ et $f(3)$, arrondis à 10^{-2} , puis tracer T et l'allure de $\mathcal{C}_f$ dans le repère orthogonal ci-dessous (à rendre avec la copie).

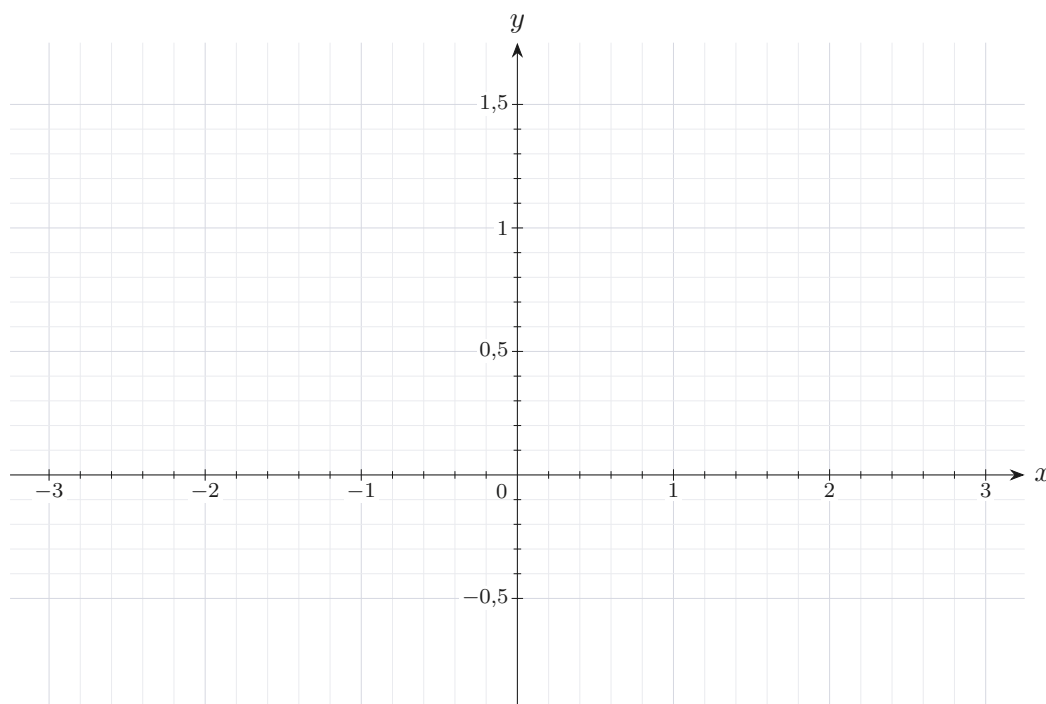
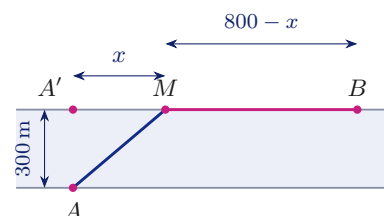


Figure 1 — Repère orthogonal à compléter

Exercice 4 La canalisation la moins chère

5 pts ●●●

Une commune relie un captage d'eau, situé en A sur une rive d'une rivière rectiligne de largeur 300 m, à un réservoir situé en B sur l'autre rive. On note A' le point de l'autre rive situé en face de A ; $A'B = 800$ m. La canalisation comporte une partie immergée $[AM]$, avec $M \in [A'B]$, puis une partie enterrée $[MB]$ (figure 2). La pose coûte 500 € par mètre sous l'eau et 300 € par mètre à terre. On pose $x = A'M$, avec $x \in [0; 800]$.

Figure 2 — Le tracé $A \rightarrow M \rightarrow B$

- 4.1** Justifier que $AM = \sqrt{x^2 + 90\,000}$, puis que le coût total de la pose, en euros, est $C(x) = 500\sqrt{x^2 + 90\,000} + 300(800 - x)$.
- 4.2** Montrer que, pour tout $x \in [0; 800]$,

$$C'(x) = \frac{500x}{\sqrt{x^2 + 90\,000}} - 300.$$

- 4.3** Démontrer que, pour $x \geq 0$, $C'(x) \geq 0$ équivaut à $16x^2 \geq 810\,000$. En déduire le signe de $C'(x)$ sur $[0; 800]$, puis le tableau de variations de C .
- 4.4** Déterminer le tracé le moins coûteux et son coût. Comparer ce coût à celui des deux tracés « naturels » : $M = A'$ et $M = B$.
- 4.5** Le coût de pose à terre passe à 400 € par mètre, celui sous l'eau restant de 500 € par mètre. Reprendre les questions 4.2 et 4.3 avec ce nouveau coût, déterminer le tracé optimal et son coût, puis dire si le point M se rapproche ou s'éloigne de A' .