

TERMINALE SPÉCIALITÉ · MATHÉMATIQUES · ANALYSE · CHAPITRE 5

Contrôle A Compléments sur la dérivation

Dérivées composées, tangentes, étude de fonction, optimisation

Durée : 1 h · calculatrice autorisée · 4 exercices indépendants · barème sur 20



R. RINGUET · 2026 – 2027

Nom : Prénom : Classe : Note : /20

★ CONSIGNES

Tout calcul de dérivée doit être justifié : formule utilisée, fonction u choisie, calcul de u' . Les réponses du QCM ne demandent aucune justification. Les tableaux de variations doivent être complets (bornes, limites ou valeurs aux extrémités, flèches). La qualité de la rédaction est prise en compte dans la notation.

Exercice 1 Questionnaire à choix multiples

5 pts ●○○○

Pour chacune des cinq questions, **une seule** des quatre réponses proposées est exacte. Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte un point; une réponse fausse ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

- 1.1** La dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-3x+1}$ est la fonction :
- a) $x \mapsto e^{-3x+1}$ b) $x \mapsto -3e^{-3x+1}$ c) $x \mapsto 3e^{-3x+1}$ d) $x \mapsto -3e^{-3}$
- 1.2** La dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x^2 + 1)^3$ est la fonction :
- a) $x \mapsto 3(x^2 + 1)^2$ b) $x \mapsto 2x(x^2 + 1)^3$ c) $x \mapsto 6x(x^2 + 1)^2$ d) $x \mapsto 6x(x^2 + 1)^3$
- 1.3** Soit f la fonction définie sur $] -1,25; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{4x+5}$. Alors $f'(1)$ est égal à :
- a) $\frac{2}{3}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{4}{9}$ d) $\frac{2}{9}$
- 1.4** Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f'(4) = 5$. On pose $g(x) = f(3x - 2)$. Alors $g'(2)$ est égal à :
- a) 5 b) 3 c) 15 d) 45
- 1.5** La dérivée seconde de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x - 1)^3$ est la fonction :
- a) $x \mapsto 6(2x - 1)$ b) $x \mapsto 12(2x - 1)$ c) $x \mapsto 24(2x - 1)$ d) $x \mapsto 24(2x - 1)^2$

Exercice 2 Six dérivées

4 pts ●○○○

Déterminer la fonction dérivée de chacune des fonctions suivantes, définies sur $\mathbb{R}$ sauf indication contraire.

- a) $f(x) = e^{x^2-3x}$ b) $f(x) = (5 - 2x)^4$ c) $f(x) = \sqrt{x^2 + 8}$
- d) $f(x) = \frac{1}{(3x + 1)^2}, x > -\frac{1}{3}$ e) $f(x) = x^2 e^{-x}$ f) $f(x) = e^{\sqrt{x}}, x > 0$

Exercice 3 Étude d'une fonction avec une racine carrée

6 pts ●●○○

Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 13}$. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

- 3.1** Vérifier que, pour tout réel x , $x^2 - 4x + 13 = (x - 2)^2 + 9$. En déduire que f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
- 3.2** Déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ en justifiant.

- 3.3** Montrer que, pour tout réel x , $f'(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+13}}$, puis étudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variations complet de f (limites comprises). On donnera la valeur exacte du minimum de f .
- 3.4** Montrer qu'une équation de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 5 est $y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x+1)$.
- 3.5** Calculer $f(-2)$ et $f(6)$. Tracer T puis l'allure de $\mathcal{C}_f$ dans le repère ci-dessous (à rendre avec la copie).

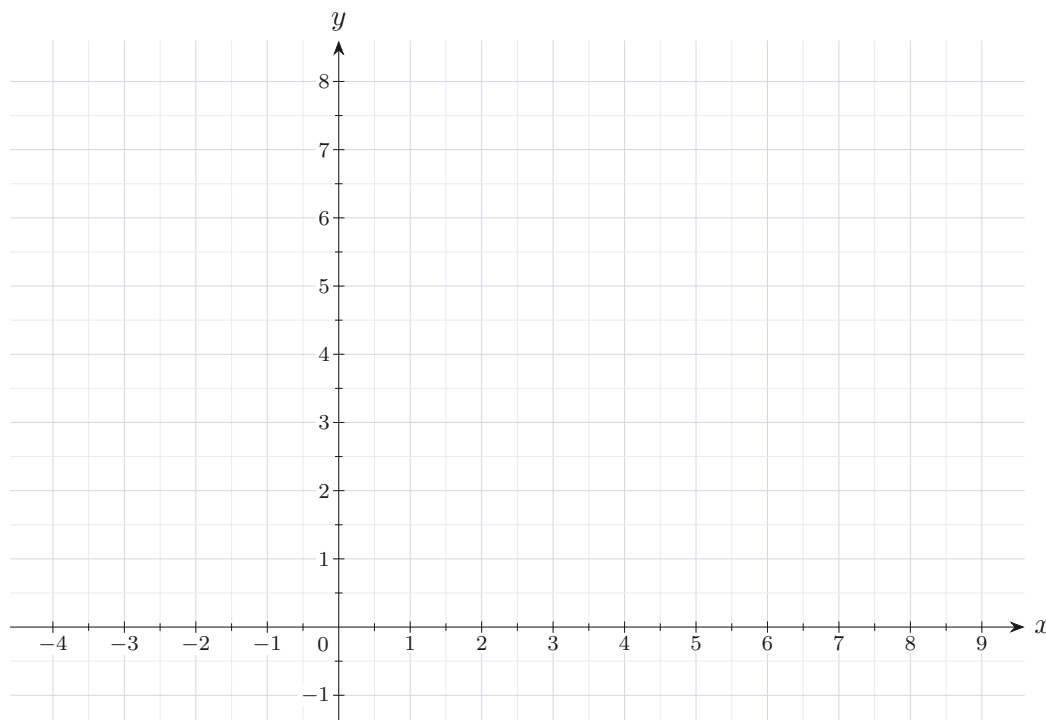


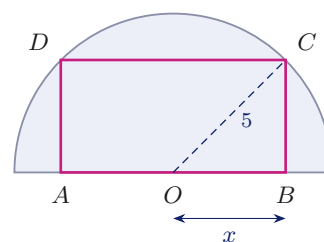
Figure 1 — Repère à compléter

Exercice 4 Un panneau publicitaire

5 pts ●●●○

Un panneau publicitaire a la forme d'un demi-disque de rayon 5 m. On souhaite y coller une affiche rectangulaire $ABCD$ dont le côté $[AB]$ est porté par le diamètre et dont les sommets C et D appartiennent au demi-cercle (figure 2). On note x la distance, en mètres, du centre O au point B , avec $x \in]0; 5[$.

- 4.1** Justifier que $BC = \sqrt{25 - x^2}$, puis que l'aire de l'affiche, en m^2 , est $\mathcal{A}(x) = 2x\sqrt{25 - x^2}$.
- 4.2** Montrer que, pour tout $x \in]0; 5[$, $\mathcal{A}'(x) = \frac{2(25 - 2x^2)}{\sqrt{25 - x^2}}$.
- 4.3** Étudier le signe de $\mathcal{A}'(x)$ sur $]0; 5[$ et dresser le tableau de variations de $\mathcal{A}$.
- 4.4** En déduire la valeur exacte de x pour laquelle l'aire de l'affiche est maximale, ainsi que cette aire maximale. Donner enfin les dimensions de l'affiche, arrondies à 10^{-2} .

Figure 2 — L'affiche $ABCD$