

TERMINALE SPÉCIALITÉ · MATHÉMATIQUES · ANALYSE · CHAPITRE 5



R. RINGUET · 2026 – 2027

Approfondissement

Compléments sur la dérivation

Pour aller plus loin : démontrer les formules, tangentes issues d'un point, familles de courbes

6 exercices · niveau ●●● · durée conseillée : 2 h 30 · calculatrice autorisée

Exercice 1 Démontrer les formules du cours

●●●

La formule $(v \circ u)' = (v' \circ u) \times u'$ est admise ; l'objectif est d'en déduire, ou de retrouver autrement, les formules usuelles du chapitre.

- 1.1 Soit u dérivable et *strictement positive* sur un intervalle I , et $f = \sqrt{u}$, dont on admet qu'elle est dérivable sur I . En dérivant les deux membres de $(f(x))^2 = u(x)$, démontrer que $f'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$ sur I .
- 1.2 Soit u une fonction dérivable sur I . Démontrer *par récurrence* que, pour tout entier $n \geq 1$, la fonction u^n est dérivable sur I et $(u^n)' = n u' u^{n-1}$. On utilisera uniquement la formule de dérivation d'un produit.
- 1.3 On suppose de plus que u ne s'annule pas sur I et l'on admet que u^{-n} est dérivable sur I . Soit $n \geq 1$ un entier. En dérivant les deux membres de l'égalité $u^n \times u^{-n} = 1$, démontrer que $(u^{-n})' = -n u' u^{-n-1}$. Que peut-on en conclure sur la validité de la formule de la question 1.2 ?
- 1.4 Application : dériver $x \mapsto \frac{1}{(x^2 + 1)^4}$ sur $\mathbb{R}$, puis $x \mapsto \sqrt{x^3 + 1}$ sur $] -1 ; +\infty[$.

Exercice 2 Tangentes issues d'un point

●●●

- 2.1 Soit $f(x) = e^{2x}$ sur $\mathbb{R}$, de courbe $\mathcal{C}_f$, et soit a un réel. Montrer qu'une équation de la tangente T_a à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a est $y = 2e^{2a}(x - a) + e^{2a}$, puis déterminer les réels a tels que T_a passe par l'origine du repère et donner une équation de la tangente obtenue.
- 2.2 Soit g la fonction racine carrée, définie sur $]0 ; +\infty[$. Déterminer toutes les tangentes à la courbe de g passant par le point $A(-4 ; 0)$.
- 2.3 Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = e^{-x}$. Combien de tangentes à la courbe de h passent par l'origine du repère ? Donner leur équation.

Exercice 3 La distance d'un point à une parabole

●●●

Le plan est muni d'un repère orthonormé. On note $\mathcal{P}$ la parabole d'équation $y = x^2$ et A le point de coordonnées $(0 ; 2)$. Pour tout réel x , on note M_x le point de $\mathcal{P}$ de coordonnées $(x ; x^2)$.

- 3.1 Montrer que, pour tout réel x , $AM_x^2 = x^4 - 3x^2 + 4$.
- 3.2 Justifier que déterminer le minimum de la distance AM_x revient à déterminer le minimum de AM_x^2 .
- 3.3 On pose $d(x) = x^4 - 3x^2 + 4$. Montrer que $d'(x) = 2x(2x^2 - 3)$, étudier son signe sur $\mathbb{R}$, puis dresser le tableau de variations de d .
- 3.4 En déduire les coordonnées des points de $\mathcal{P}$ les plus proches de A , ainsi que la distance minimale (valeur exacte, puis arrondie à 10^{-3}).
- 3.5 Soit M l'un de ces deux points. Déterminer le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{P}$ en M , puis celui de la droite (AM) . Que constate-t-on ?

Exercice 4 Une famille de courbes



Pour tout réel $k > 0$, on note f_k la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f_k(x) = x e^{-kx}$, et $\mathcal{C}_k$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

- 4.1 Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_k(x)$ (écrire $f_k(x) = \frac{1}{k} \times \frac{kx}{e^{kx}}$ et poser $X = kx$).
- 4.2 Montrer que, pour tout $x \geq 0$, $f'_k(x) = (1 - kx) e^{-kx}$, puis dresser le tableau de variations de f_k sur $[0; +\infty[$ (limite comprise).
- 4.3 En déduire que $\mathcal{C}_k$ admet un unique point S_k d'ordonnée maximale; donner ses coordonnées en fonction de k .
- 4.4 Démontrer que, lorsque k décrit $]0; +\infty[$, tous les points S_k appartiennent à une même droite Δ dont on donnera une équation. Tous les points de Δ sont-ils atteints?
- 4.5 Déterminer la valeur exacte de k pour laquelle le maximum de f_k vaut 2, puis sa valeur arrondie à 10^{-3} .

Exercice 5 Dérivées successives (hors programme — pour aller plus loin)



Si f peut être dérivée autant de fois qu'on le souhaite, on note $f^{(n)}$ sa *dérivée n -ième* : $f^{(0)} = f$ et $f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$ pour tout entier $n \geq 0$; ainsi $f^{(1)} = f'$ et $f^{(2)} = f''$.

- 5.1 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-2x}$. Calculer $f'(x)$, $f''(x)$ et $f^{(3)}(x)$, conjecturer une expression de $f^{(n)}(x)$, puis démontrer cette conjecture par récurrence.
- 5.2 Soit $g(x) = \frac{1}{x+1}$ sur $] -1; +\infty[$. Calculer $g'(x)$, $g''(x)$, $g^{(3)}(x)$, puis démontrer par récurrence que $g^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}}$ pour tout entier $n \geq 0$, où $n! = 1 \times 2 \times \dots \times n$ et $0! = 1$.
- 5.3 Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x e^x$. Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 0$, $h^{(n)}(x) = (x+n) e^x$.

Exercice 6 Une équation résolue numériquement



- 6.1 Soit φ la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $\varphi(t) = 2t e^{-t^2}$. Montrer que $\varphi'(t) = (2 - 4t^2) e^{-t^2}$, dresser le tableau de variations de φ , puis en déduire que, pour tout $t \geq 0$, $\varphi(t) \leq \sqrt{2} e^{-1/2} < 1$.
- 6.2 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-x^2} - x$. Montrer que $f'(x) = -2x e^{-x^2} - 1$, puis que $f'(x) < 0$ pour tout réel x (on distinguera les cas $x \geq 0$ et $x < 0$, et l'on posera $t = -x$ dans le second cas).
- 6.3 Déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- 6.4 En déduire que l'équation $e^{-x^2} = x$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$ et justifier que $\alpha \in]0; 1[$. Déterminer, par balayage, un encadrement de α d'amplitude 10^{-2} .
- 6.5 La fonction `dicho` ci-contre renvoie, par dichotomie, un encadrement de α d'amplitude au plus ϵ . Compléter les lignes 9 et 11 en justifiant à l'aide du sens de variation de f , puis donner la valeur de α arrondie à 10^{-3} fournie par `dicho(0.0001)`.

```

1  from math import exp
2  def f(x):
3      return exp(-x**2) - x
4  def dicho(e):
5      a, b = 0, 1
6      while b - a > e:
7          m = (a + b)/2
8          if f(m) > 0:
9              a = ...
10         else:
11             b = ...
12     return a, b

```