

Fiche de cours Combinatoire et dénombrement

L'essentiel du chapitre en deux pages

définitions · propriétés · méthodes · à savoir par cœur

1 CARDINAL, PRINCIPE ADDITIF ET PRINCIPE MULTIPLICATIF

Définition. Un ensemble E est **fini** s'il possède un nombre fini d'éléments; ce nombre est son **cardinal**, noté $\text{Card}(E)$. L'ensemble vide $\emptyset$ a pour cardinal 0.

Propriété — principe additif. Si A et B sont deux parties finies d'un ensemble E :

$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B), \quad \text{et} \quad \text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) \text{ si } A \cap B = \emptyset.$$

Pour le complémentaire d'une partie A de E : $\text{Card}(\overline{A}) = \text{Card}(E) - \text{Card}(A)$.

Propriété — principe multiplicatif. $\text{Card}(A \times B) = \text{Card}(A) \times \text{Card}(B)$. Plus généralement, k choix successifs offrant respectivement $n_1, n_2, \dots, n_k$ possibilités conduisent à $n_1 \times n_2 \times \dots \times n_k$ résultats : c'est le nombre de chemins de l'arbre.

2 k -UPLETS ET PARTIES D'UN ENSEMBLE

Définition. Un **k -uplet** (ou k -liste) d'éléments de E est une liste *ordonnée* de k éléments de E , les répétitions étant *autorisées* : c'est un élément de E^k .

Propriété. Si $\text{Card}(E) = n$, alors E possède n^k k -uplets et 2^n parties.

Remarque. Décrire une partie de E , c'est répondre « oui » (1) ou « non » (0) pour chacun des n éléments : les parties de E sont en bijection avec les n -uplets de $\{0; 1\}$, d'où le 2^n .

3 ARRANGEMENTS ET PERMUTATIONS

Définition. Un **arrangement** de k éléments de E est un k -uplet d'éléments *deux à deux distincts* de E (ordonné, sans répétition). Une **permutation** de E est un arrangement de tous ses éléments.

Notation. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $n! = 1 \times 2 \times \dots \times n$ (« factorielle n »), et $0! = 1$.

Propriété. Si $\text{Card}(E) = n$ et $0 \leq k \leq n$, le nombre d'arrangements de k éléments de E est

$$A_n^k = n(n-1) \cdots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!} \quad (k \text{ facteurs}), \quad \text{et} \quad A_n^n = n! \text{ permutations.}$$

4 COMBINAISONS ET COEFFICIENTS BINOMIAUX

Définition. Une **combinaison** de k éléments de E est une *partie* de E à k éléments (non ordonnée, sans répétition). Leur nombre est le **coefficient binomial** $\binom{n}{k}$, qui se lit « k parmi n ».

Propriété. Pour $0 \leq k \leq n$:

$$\binom{n}{k} = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!};$$

en particulier $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$, $\binom{n}{1} = n$ (si $n \geq 1$) et $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ (si $n \geq 2$).

Propriété — symétrie. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$: à chaque partie on associe son complémentaire.

Propriété — relation de Pascal. Pour $1 \leq k \leq n-1$: $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$; c'est la règle de construction du triangle de Pascal.

Propriété — somme d'une ligne. $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$: on classe les 2^n parties de E selon leur nombre d'éléments.

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

Figure 1 — Triangle de Pascal.

5 CHOISIR LE BON MODÈLE

Méthode — quatre questions. (1) L'ordre compte-t-il ? (2) Les répétitions sont-elles autorisées ? (3) Combien d'objets choisit-on ? (4) Les choix sont-ils successifs (multiplicatif) ou exclusifs (additif) ?

■ FORMULAIRE — tirage de k objets dans un ensemble à n éléments

- Ordonné avec répétition (tirages successifs avec remise, codes, mots) : n^k k -uplets.
- Ordonné sans répétition (tirages successifs sans remise, podium, rangement) : $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$; si $k = n$: $n!$.
- Non ordonné sans répétition (tirage simultané, main de cartes, équipe, comité) : $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.
- **Équiprobabilité** : si toutes les issues de Ω ont la même probabilité, $P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$.

6 SAVOIR-FAIRE DU CHAPITRE

➤ SAVOIR-FAIRE

- Dénombrer une réunion, un complémentaire, un produit cartésien, une succession de choix (arbre, tableau).
- Reconnaître un k -uplet, un arrangement, une permutation ou une combinaison, et justifier le modèle choisi.
- Calculer $n!$, A_n^k et $\binom{n}{k}$, à la main ou à la calculatrice ; utiliser la symétrie et la relation de Pascal.
- Dénombrer en contexte : codes, mots et anagrammes, mains de cartes, équipes, chemins d'un quadrillage.
- Calculer une probabilité en situation d'équiprobabilité par $\text{Card}(A)/\text{Card}(\Omega)$, souvent en passant par l'événement contraire.

7 EXEMPLES TYPES

★ EXEMPLE — codes et mots

Un code comporte 4 caractères choisis parmi 26 lettres et 10 chiffres. Il y a $36^4 = 1\,679\,616$ codes possibles, mais seulement $A_{36}^4 = 36 \times 35 \times 34 \times 33 = 1\,413\,720$ codes à caractères deux à deux distincts.

★ EXEMPLE — tirage simultané

Dans un jeu de 32 cartes, on tire 5 cartes simultanément : il y a $\binom{32}{5} = 201\,376$ mains. Celles contenant exactement deux as sont au nombre de $\binom{4}{2} \times \binom{28}{3} = 6 \times 3\,276 = 19\,656$, d'où une probabilité $\frac{19\,656}{201\,376} \approx 0,098$.

★ EXEMPLE — événement contraire

Un comité de 3 personnes est tiré au sort parmi 7 femmes et 5 hommes, soit $\binom{12}{3} = 220$ comités. « Au moins une femme » a pour contraire « aucune femme », qui compte $\binom{5}{3} = 10$ comités : la probabilité cherchée vaut $1 - \frac{10}{220} = \frac{21}{22} \approx 0,955$.

✗ PIÈGES

- Confondre *ordonné* et *non ordonné* : un tirage simultané donne des combinaisons, un tirage successif sans remise des arrangements, et $A_n^k = k! \times \binom{n}{k}$.
- A_n^k et $\binom{n}{k}$ ne sont définis que pour $0 \leq k \leq n$: pour $k > n$, il n'y a ni arrangement ni combinaison.
- Le principe additif $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B)$ exige $A \cap B = \emptyset$: sinon, retrancher $\text{Card}(A \cap B)$, sous peine de compter deux fois.
- « Au moins un » se traite presque toujours par l'événement contraire « aucun » ; « exactement k » se traite en choisissant d'abord les k places ou les k objets.