

TERMINALE SPÉCIALITÉ · MATHÉMATIQUES · ALGÈBRE ET GÉOMÉTRIE · CHAPITRE 11



R. RINGUET · 2026 – 2027

Exercices 1 Combinatoire et dénombrement

Les bases : principes additif et multiplicatif, k -uplets, parties, arrangements, combinaisons

7 exercices · niveau ●○○ à ●●○ · durée conseillée : 2 h · calculatrice autorisée

★ À RETENIR — Ce qu'il faut savoir faire à la fin de la feuille

- Dénombrer une réunion, une succession de choix, les k -uplets et les parties d'un ensemble fini.
- Reconnaître un k -uplet, un arrangement, une permutation ou une combinaison ; calculer $n!$, A_n^k , $\binom{n}{k}$; utiliser la symétrie et la relation de Pascal.

■ RAPPEL — Le formulaire du chapitre

- **Les deux principes.** Si $A \cap B = \emptyset$: $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B)$; sinon on retranche $\text{Card}(A \cap B)$. Si $A \subset E$: $\text{Card}(\overline{A}) = \text{Card}(E) - \text{Card}(A)$. Enfin $\text{Card}(A \times B) = \text{Card}(A) \times \text{Card}(B)$: k choix successifs offrant $n_1, \dots, n_k$ possibilités donnent $n_1 \times \dots \times n_k$ résultats — autant de chemins dans l'arbre.
- **k -uplets et parties.** Un ensemble à n éléments possède n^k k -uplets (choix ordonnés, répétitions permises) et 2^n parties : décrire une partie, c'est répondre « oui » (1) ou « non » (0) pour chacun des n éléments, soit écrire un n -uplet de $\{0; 1\}$.
- **Arrangements, permutations.** k -uplets d'éléments deux à deux distincts : $A_n^k = n(n-1) \cdots (n-k+1) = n!/(n-k)!$, où $n! = 1 \times 2 \times \dots \times n$ et $0! = 1$; pour $k = n$, $A_n^n = n!$ est le nombre de permutations.
- **Combinaisons.** Parties à k éléments : $\binom{n}{k} = A_n^k/k! = n!/(k!(n-k)!)$, avec $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$, $\binom{n}{1} = n$ si $n \geq 1$, $\binom{n}{2} = n(n-1)/2$ si $n \geq 2$; symétrie $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$; relation de Pascal $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$ pour $1 \leq k \leq n-1$, règle de construction du triangle de Pascal.

Exercice 1 Principe additif, principe multiplicatif

●○○

- 1.1 Un restaurant propose 4 entrées, 6 plats et 3 desserts. Combien de menus « entrée + plat + dessert » propose-t-il ? Combien de repas formés d'un plat et d'un seul des deux autres éléments ?
- 1.2 Dans une promotion de 180 élèves, 14 sont inscrits à l'atelier théâtre, 11 à l'atelier robotique et 5 aux deux. Combien d'élèves sont inscrits à au moins un atelier ? à exactement un ? à aucun des deux ?

Exercice 2 Choisir le bon modèle

●○○

Une urne contient 12 jetons numérotés de 1 à 12. Pour chaque situation ci-dessous, dire si l'ordre intervient et si les répétitions sont possibles, nommer le modèle (k -uplet, arrangement, permutation ou combinaison), puis donner le nombre de résultats.

- | | |
|--|--|
| a) Les codes d'un cadenas à 4 molettes portant les chiffres 0 à 9. | b) Les grilles de réponses d'un questionnaire de 12 questions « vrai/faux ». |
| c) Les tirages de 3 jetons l'un après l'autre, avec remise. | d) Les tirages de 3 jetons l'un après l'autre, sans remise. |
| e) Les tirages simultanés de 3 jetons de l'urne. | f) Les alignements des 12 jetons sur une table. |
| g) Les répartitions de 5 colis discernables dans 3 entrepôts. | h) Les mots de 4 lettres, ayant un sens ou non, formés avec 26 lettres. |

Exercice 3 Les parties d'un ensemble

●●○

Soit $E = \{a; b; c\}$. Décrire une partie A de E revient à répondre aux questions « $a \in A$? », « $b \in A$? », « $c \in A$? » en codant « oui » par 1 et « non » par 0 : à toute partie correspond un unique mot de trois chiffres, et réciproquement (figure 1).

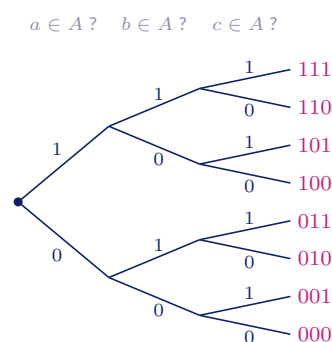


Figure 1 — Les parties de $E = \{a; b; c\}$

- 3.1 Recopier les huit mots de la figure 1 et écrire en face de chacun la partie de E correspondante. Combien E possède-t-il de parties ?
- 3.2 Combien de mots comportent exactement deux fois le chiffre 1 ? À quelles parties correspondent-ils ?
- 3.3 Combien de parties possède un ensemble à 10 éléments ? à 20 éléments ? Un ensemble F a exactement 4096 parties : déterminer $\text{Card}(F)$.
- 3.4 Un ensemble à 9 éléments a-t-il plus de parties que de 3-uplets ?

Exercice 4 Factorielles, permutations et arrangements

●○○

- 4.1 Calculer sans calculatrice $5!$; $8!/5!$; $10!/(7! \times 3!)$; A_7^3 , puis simplifier $(n+1)!/(n-1)!$ pour $n \geq 1$.
- 4.2 De combien de façons peut-on ranger côte à côte 8 livres tous différents sur une étagère ? Une course oppose 12 athlètes, sans ex æquo : combien de podiums (1^{er}, 2^e, 3^e) peut-on observer ?
- 4.3 Combien existe-t-il de codes de 5 chiffres deux à deux distincts pris parmi $0, 1, \dots, 9$? Le mot « MONTRE » est formé de six lettres distinctes : combien d'anagrammes possède-t-il, et combien commencent par « M » ?

Exercice 5 Coefficients binomiaux

●○○

- 5.1 Calculer les coefficients suivants (les quatre premiers sans calculatrice).
 a) $\binom{7}{0}$ b) $\binom{8}{1}$ c) $\binom{7}{2}$ d) $\binom{9}{9}$ e) $\binom{10}{3}$ f) $\binom{12}{5}$
- 5.2 Justifier, sans calculer $15!$, que $\binom{15}{13} = \binom{15}{2}$, puis donner la valeur commune.
- 5.3 Résoudre dans $\mathbb{N}$: $\binom{n}{1} = 9$; $\binom{n}{2} = 28$; $\binom{n}{n-1} = 15$. Combien de tirages simultanés de 3 boules parmi 15 ?

Exercice 6 La relation de Pascal

●●○

- 6.1 Vérifier, en calculant les trois coefficients, que $\binom{6}{2} + \binom{6}{3} = \binom{7}{3}$.
- 6.2 La ligne $n = 7$ du triangle de Pascal est 1 7 21 35 35 21 7 1. En utilisant uniquement la relation de Pascal, écrire les lignes $n = 8$ puis $n = 9$.
- 6.3 Calculer la somme des neuf nombres de la ligne $n = 8$: quel lien avec le nombre de parties d'un ensemble à 8 éléments ? Enfin, à l'aide de la relation de Pascal, écrire $\binom{9}{4} + \binom{9}{5}$ comme un seul coefficient binomial et donner sa valeur.

Exercice 7 Un comité

●●○

Une association compte 21 membres : 12 femmes et 9 hommes. On constitue un comité de 5 membres.

- 7.1 Combien de comités peut-on former ? Combien comportent exactement 3 femmes et 2 hommes ? Combien comportent au moins un homme ?
- 7.2 L'association désigne finalement, parmi ses 21 membres, un président, un secrétaire et un trésorier, tous différents : combien de bureaux différents peut-elle former ?
- 7.3 Le comité de 5 membres est tiré au sort, tous les comités étant équiprobables. Quelle est la probabilité qu'il ne comporte que des femmes (valeur exacte, puis arrondi à 10^{-4}) ?