

TERMINALE SPÉCIALITÉ · MATHÉMATIQUES · ALGÈBRE ET GÉOMÉTRIE · CHAPITRE 11



R. RINGUET · 2026 – 2027

Contrôle B Combinatoire et dénombrement

Vrai ou faux, relation de Pascal et sa démonstration, séquences d'ADN, rangements contraints

Durée : 1 h · calculatrice autorisée · 4 exercices indépendants · barème sur 20

Nom : Prénom : Classe : Note : / 20

★ CONSIGNES

Une affirmation déclarée fausse doit être réfutée par un calcul ou un contre-exemple explicite. Tout dénombrement sera justifié : modèle utilisé (k -uplet, arrangement, permutation ou combinaison), calcul écrit, puis résultat. Les probabilités sont calculées en situation d'équiprobabilité sous la forme $\text{Card}(A) / \text{Card}(\Omega)$. La qualité de la rédaction est prise en compte dans la notation.

Exercice 1 Vrai ou faux?

4 pts ●●○

Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse et **justifier**. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

- 1.1 Affirmation :** « le nombre de façons de choisir deux délégués parmi les 10 élèves d'un groupe est égal à 90 ».
- 1.2 Affirmation :** « pour tout entier $n \geq 2$, $\binom{n}{2} + \binom{n}{n-2} = n(n-1)$ ».
- 1.3 Affirmation :** « le mot MATHS, formé de cinq lettres distinctes, possède 5^5 anagrammes ».
- 1.4 Affirmation :** « le nombre de chemins d'un arbre à 8 niveaux comportant deux branches à chaque niveau est égal à la somme des neuf coefficients de la ligne $n = 8$ du triangle de Pascal ».

Exercice 2 La relation de Pascal

5 pts ●●●

On rappelle que, pour $0 \leq k \leq n$, $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

- 2.1** Démontrer par le calcul que, pour tous entiers n et k tels que $1 \leq k \leq n-1$,

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}.$$

- 2.2** Soit E un ensemble à n éléments et a un élément de E . En classant les parties à k éléments de E selon qu'elles contiennent ou non l'élément a , redémontrer cette relation par un argument de dénombrement.
- 2.3** La figure 1 illustre la relation sur le triangle de Pascal. Quel coefficient binomial la case marquée « ? » représente-t-elle ? Donner sa valeur.
- 2.4** On donne $\binom{11}{4} = 330$ et $\binom{11}{5} = 462$. En déduire $\binom{12}{5}$ sans aucun calcul de factorielle, puis $\binom{12}{7}$ en justifiant.

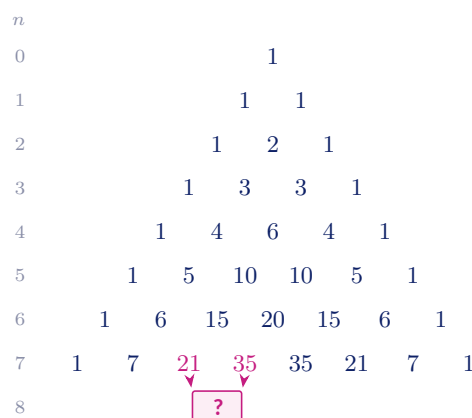


Figure 1 — La relation de Pascal

Exercice 3 Séquences d'ADN

5 pts ●●○

Un brin d'ADN est une suite de nucléotides notés A, T, G ou C. Un *codon* est un groupe ordonné de trois nucléotides consécutifs.

- 3.1 Combien de codons différents existe-t-il ? Combien ne contiennent aucun A ? Combien en contiennent au moins un ?
- 3.2 Combien de codons sont formés de trois nucléotides deux à deux distincts ?
- 3.3 On considère maintenant une séquence de dix nucléotides. Combien de séquences différentes existe-t-il ? Combien comportent exactement trois A ? (On choisira d'abord les rangs occupés par les trois A.)
- 3.4 Combien de séquences de dix nucléotides comportent au moins un A ? Combien en comportent au moins huit ?
- 3.5 Une séquence de dix nucléotides est produite au hasard, toutes les séquences étant équiprobables. Déterminer la probabilité qu'elle comporte exactement trois A, puis la probabilité qu'elle n'en comporte aucun (arrondir à 10^{-3}).

Exercice 4 Le rayonnage d'une bibliothèque

6 pts ●●●

Un élève range côte à côte, sur une même étagère, 4 romans, 3 bandes dessinées et 2 manuels : les neuf livres sont deux à deux différents.

- 4.1 Combien de rangements différents peut-il réaliser ?
- 4.2 Combien de rangements placent les quatre romans côte à côte, dans un ordre quelconque ?
- 4.3 Combien de rangements regroupent les livres de chaque catégorie, les trois groupes pouvant être disposés dans un ordre quelconque ?
- 4.4 Combien de rangements ne placent *pas* les deux manuels côte à côte ?
- 4.5 Un rangement est choisi au hasard, tous les rangements étant équiprobables. Déterminer la probabilité que les deux manuels occupent les deux extrémités de l'étagère (fraction irréductible).
- 4.6 L'élève emporte finalement trois de ces neuf livres en vacances. Combien de choix possibles ? Combien comportent au moins un roman ? Combien comportent exactement un manuel ?
- 4.7 La fonction Python ci-contre est appelée avec un entier $n \geq 3$. Déterminer la valeur renvoyée par `compte(9)`, puis exprimer `compte(n)` à l'aide d'un coefficient binomial. Quel lien avec la question 4.6 ?
- 4.8 Reprendre la question 4.1 en imposant que les trois bandes dessinées, qui forment une série, apparaissent de gauche à droite dans l'ordre des tomes 1, 2 puis 3 (sans être nécessairement côte à côte).

```
1 def compte(n):
2     c = 0
3     for i in range(1, n+1):
4         for j in range(i+1, n+1):
5             for k in range(j+1, n+1):
6                 c = c+1
7     return c
```