

Approfondissement

Combinatoire et dénombrement

Pour aller plus loin : démonstrations du cours, inclusion-exclusion, répétitions, anniversaires

6 exercices · niveau ●●● · durée conseillée : 2 h 30 · calculatrice autorisée

Exercice 1 Les démonstrations du cours

●●●

Soit E un ensemble à n éléments, $n \geq 1$.

- 1.1 Démontrer que E possède 2^n parties (on pourra associer à chaque partie le n -uplet de $\{0; 1\}$ qui la décrit).
- 1.2 En classant les parties de E selon leur nombre d'éléments, démontrer que $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$. Vérifier ce résultat pour $n = 5$ en écrivant la ligne correspondante du triangle de Pascal.
- 1.3 Démontrer la formule de symétrie $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ par un argument de dénombrement, en associant à chaque partie son complémentaire dans E .
- 1.4 Soient $n \geq 1$ et $1 \leq k \leq n$. Démontrer par le calcul que $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$, puis retrouver cette égalité en dénombrant de deux façons les couples $(A; a)$ où A est une partie de E à k éléments et a un élément de A (on choisit une équipe de k joueurs puis son capitaine, ou bien le capitaine puis ses coéquipiers).

Exercice 2 Trois langues vivantes

●●●

Un centre de langues pour adultes compte 200 inscrits, qui suivent un ou plusieurs cours de langue ; 120 étudient l'anglais, 90 l'espagnol et 60 l'allemand ; 55 étudient l'anglais et l'espagnol, 30 l'anglais et l'allemand, 20 l'espagnol et l'allemand, et 10 étudient les trois langues ; les autres inscrits n'étudient que d'autres langues (italien, chinois...). On note A , S et D les ensembles correspondants.

- 2.1 En appliquant trois fois la formule $\text{Card}(X \cup Y) = \text{Card}(X) + \text{Card}(Y) - \text{Card}(X \cap Y)$, démontrer que

$$\begin{aligned} \text{Card}(A \cup S \cup D) &= \text{Card}(A) + \text{Card}(S) + \text{Card}(D) \\ &\quad - \text{Card}(A \cap S) - \text{Card}(A \cap D) - \text{Card}(S \cap D) + \text{Card}(A \cap S \cap D). \end{aligned}$$

- 2.2 Reproduire et compléter le diagramme de la figure 1 : chacune des huit régions doit porter son effectif.
- 2.3 Combien d'inscrits étudient au moins une de ces trois langues ? aucune ? exactement une ? exactement deux ?
- 2.4 Un inscrit est choisi au hasard, tous les inscrits ayant la même probabilité d'être choisis. Quelle est la probabilité qu'il étudie exactement deux de ces trois langues (fraction irréductible) ?

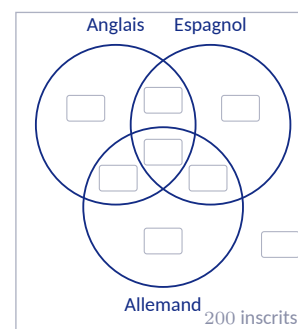


Figure 1 — Diagramme à compléter

Exercice 3 Des macarons (hors programme — pour aller plus loin)

●●●

Un pâtissier propose 5 parfums de macarons. Une boîte contient 8 macarons ; deux macarons de même parfum étant indiscernables, une boîte est déterminée par le nombre de macarons de chaque parfum. On code une boîte par un mot de 8 étoiles et 4 barres : avant la première barre les macarons du parfum n° 1, entre la première et la deuxième barre ceux du parfum n° 2, etc. Ainsi $\star\star|\star\star|\star|\star\star$ code la boîte $(2; 0; 3; 1; 2)$.

- 3.1 Décrire la boîte codée par $\star\star\star\star|\star\star|\star\star$, puis coder la boîte contenant 8 macarons du parfum n° 4.

- 3.2** Justifier que ce codage met en correspondance les boîtes et les mots de 12 caractères comportant exactement 4 barres. En déduire le nombre de boîtes possibles.
- 3.3** Combien de boîtes contiennent au moins un macaron de chaque parfum? (On peut commencer par placer un macaron de chaque parfum.)
- 3.4** Démontrer que le nombre de façons de choisir k objets parmi n types, avec répétitions autorisées, est $\binom{n+k-1}{k}$. Application : $n = 6$ parfums et $k = 4$ macarons.

Exercice 4 Les anagrammes de MATHEMATIQUES



Le mot MATHEMATIQUES comporte 13 lettres : les lettres M, A, T et E y figurent chacune deux fois, et les lettres H, I, Q, U, S une seule fois.

- 4.1** Pour construire une anagramme, on choisit les deux positions des M parmi les 13, puis celles des A parmi les 11 restantes, et ainsi de suite. Écrire le nombre d'anagrammes comme un produit de coefficients binomiaux, puis le calculer.
- 4.2** Démontrer que ce nombre est égal à $13!/2^4$.
- 4.3** Combien d'anagrammes commencent par la lettre M et se terminent par la lettre S? Généraliser enfin au cas d'un mot de N lettres comportant p lettres répétées chacune exactement deux fois, les autres étant distinctes.

Exercice 5 Le paradoxe des anniversaires



On réunit n personnes, avec $2 \leq n \leq 365$. On admet que l'année compte 365 jours et que toutes les répartitions des dates de naissance sont équiprobables : l'univers Ω est l'ensemble des n -uplets de jours de l'année.

- 5.1** Déterminer $\text{Card}(\Omega)$, puis le nombre de n -uplets dont les composantes sont deux à deux distinctes.
- 5.2** En déduire que la probabilité p_n qu'au moins deux personnes du groupe aient la même date d'anniversaire vaut

$$p_n = 1 - \frac{365 \times 364 \times \cdots \times (365 - n + 1)}{365^n}.$$

```

1 def seuil():
2     n, q = 1, 1.0
3     while ... :
4         n = n + 1
5         q = ...
6     return n

```

- 5.3** Calculer p_{10} , p_{23} et p_{50} , arrondis à 10^{-3} . Commenter.
- 5.4** Recopier et compléter les lignes 3 et 5 de la fonction seuil ci-contre, qui renvoie le plus petit entier n tel que $p_n \geq 0,5$, et donner sa valeur.

Exercice 6 Monter un escalier



Un escalier comporte n marches. On le monte en enchaînant des pas de une ou de deux marches ; deux montées sont différentes lorsque la suite des pas diffère. On note u_n le nombre de montées possibles, avec $u_1 = 1$ et $u_2 = 2$.

- 6.1** Déterminer u_3 et u_4 en énumérant les montées possibles. Puis, en distinguant selon la taille du dernier pas, démontrer que $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$ pour tout $n \geq 3$ et en déduire u_{10} .
- 6.2** On s'intéresse aux montées comportant exactement k pas de deux marches. Justifier qu'une telle montée comporte $n - 2k$ pas d'une marche, donc $n - k$ pas au total, et qu'il y en a $\binom{n-k}{k}$. En déduire que

$$u_n = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n-k}{k},$$

où $\lfloor n/2 \rfloor$ désigne le plus grand entier inférieur ou égal à $n/2$, puis vérifier cette formule pour $n = 10$.