

TERMINALE SPÉCIALITÉ · MATHÉMATIQUES · ANALYSE · CHAPITRE 10



R. RINGUET · 2026 – 2027

Sujet type bac Calcul intégral

QCM — La concentration d'un médicament : étude de fonction, exposition totale et concentration moyenne

Durée : 1 h 30 · calculatrice autorisée · 2 exercices indépendants · barème sur 12

Nom : Prénom : Classe : Note : / 12

★ CONSIGNES

Deux exercices indépendants, notés comme à l'épreuve écrite du baccalauréat (5 points et 7 points). La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements sont prises en compte. Toute limite doit être justifiée, tout calcul de primitive ou d'intégrale détaillé, et chaque résultat numérique donné avec la précision demandée, accompagné de son unité.

Exercice 1 Questionnaire à choix multiples

5 pts ●●○

Pour chacune des cinq questions suivantes, **une seule** des quatre réponses proposées est exacte. Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte un point ; une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

1.1 La valeur moyenne de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ sur l'intervalle $[1 ; e]$ est égale à :

- a) $\frac{1}{e-1}$ b) $e-1$ c) 1 d) $\frac{1}{e}$

1.2 Le nombre $\int_1^2 \ln x \, dx$ est égal à :

- a) $2 \ln 2 - 1$ b) $2 \ln 2$ c) $\ln 2$ d) $2 \ln 2 + 1$

1.3 Soit f une fonction continue sur $[1 ; 5]$ telle que $\int_1^5 f(x) \, dx = 12$ et $\int_3^5 f(x) \, dx = 5$. Alors $\int_1^3 f(x) \, dx$ est égal à :

- a) -7 b) 7 c) 17 d) 60

1.4 L'aire, en unités d'aire, du domaine compris entre les courbes des fonctions $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $[0 ; 1]$ est égale à :

- a) $\frac{1}{6}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{2}{3}$

1.5 Soit F la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $F(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{t} \, dt$. Alors $F'(e)$ est égal à :

- a) $\frac{1}{e}$ b) e c) 1 d) $\frac{1}{2}$

Exercice 2 La concentration d'un médicament dans le sang

7 pts ●●○

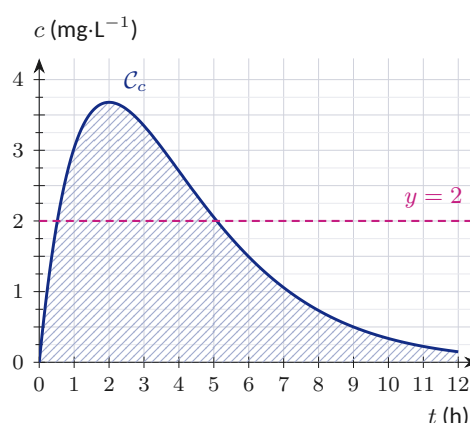
Un patient reçoit une dose unique d'un médicament à l'instant $t = 0$. La concentration du principe actif dans son sang, exprimée en $\text{mg} \cdot \text{L}^{-1}$, est modélisée pour $t \geq 0$ (t en heures) par

$$c(t) = 5t e^{-0,5t}.$$

Le médicament est considéré comme *efficace* tant que cette concentration est supérieure ou égale à $2 \text{ mg} \cdot \text{L}^{-1}$.

Partie A — Étude de la concentration

- 2.1** Calculer $c(0)$ et $c(12)$ (arrondi à 10^{-2}). Déterminer $\lim_{t \rightarrow +\infty} c(t)$ et interpréter ce résultat dans le contexte.
- 2.2** Démontrer que, pour tout $t \in [0; 12]$, $c'(t) = 5(1 - 0,5t)e^{-0,5t}$, puis dresser le tableau de variations de c sur $[0; 12]$.
- 2.3** En déduire la concentration maximale atteinte : valeur exacte, puis arrondi à 10^{-2} . À quel instant le « pic » a-t-il lieu ?
- 2.4** Démontrer que l'équation $c(t) = 2$ admet exactement deux solutions t_1 et t_2 sur $[0; 12]$, puis en donner des valeurs approchées à 10^{-2} .
- 2.5** En déduire la durée d'efficacité du médicament, arrondie à la minute.

Figure 1 — La concentration c au cours du temps

Partie B — L'exposition totale de l'organisme

On appelle *exposition totale* de l'organisme sur les douze premières heures le nombre $E = \int_0^{12} c(t) dt$.

- 2.6** Interpréter E sur la figure 1 et préciser son unité.
- 2.7** À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que $E = 20 - 140e^{-6}$. En donner l'arrondi à 10^{-2} .
- 2.8** En déduire la concentration moyenne du principe actif sur $[0; 12]$, arrondie à 10^{-2} . Cette concentration moyenne est-elle supérieure au seuil d'efficacité ?
- 2.9** On admet que, pour tout $x \in [0; 12]$, $\int_0^x c(t) dt = 20 - (10x + 20)e^{-0,5x}$. Vérifier ce résultat pour $x = 12$, puis déterminer quel pourcentage de l'exposition totale est déjà atteint au bout de 4 h (arrondir à 10^{-1}).

Partie C — Une forme à libération prolongée

Le laboratoire propose une seconde forme du même médicament, à libération prolongée, dont la concentration dans le sang est modélisée sur $[0; 12]$, en négligeant la courte phase d'absorption, par $h(t) = 3e^{-0,05t}$ (figure 2).

- 2.10** Calculer l'exposition totale $E' = \int_0^{12} h(t) dt$: valeur exacte, puis arrondi à 10^{-2} . La comparer à E (écart relatif arrondi à 10^{-1} %).
- 2.11** Calculer la concentration moyenne de cette seconde forme sur $[0; 12]$, arrondie à 10^{-2} , et la comparer à celle de la partie B.
- 2.12** Résoudre l'inéquation $h(t) \geq 2$ sur $[0; 12]$: valeur exacte, puis durée d'efficacité arrondie à la minute.
- 2.13** Comparer les deux formes du médicament sur trois critères : concentration maximale atteinte, durée d'efficacité et exposition totale. Quel argument le laboratoire peut-il avancer en faveur de la forme à libération prolongée ?

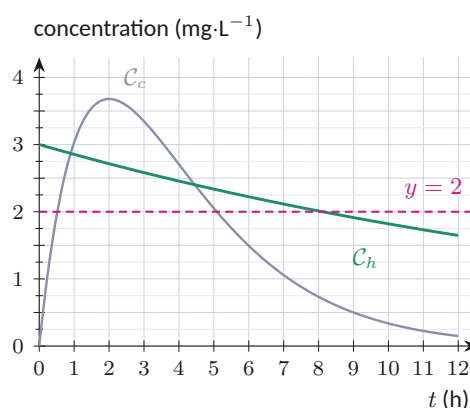


Figure 2 — Les deux formes du médicament