

TERMINALE SPÉCIALITÉ · MATHÉMATIQUES · ANALYSE · CHAPITRE 10



R. RINGUET · 2026 – 2027

Fiche de cours Calcul intégral

L'essentiel du chapitre en deux pages

définitions · propriétés · méthodes · à savoir par cœur

1 INTÉGRALE ET AIRE SOUS LA COURBE

Définition. Soit f une fonction continue et positive sur $[a; b]$ ($a \leq b$). L'intégrale de f de a à b , notée $\int_a^b f(x) dx$, est l'aire, en **unités d'aire** (u.a.), du domaine délimité par la courbe C_f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

Notation. La variable x est *muette* : $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt$. Les réels a et b sont les **bornes** de l'intégrale.

Remarque. Si l'unité de longueur vaut p cm sur l'axe des abscisses et q cm sur l'axe des ordonnées, alors $1 \text{ u.a.} = pq \text{ cm}^2$.

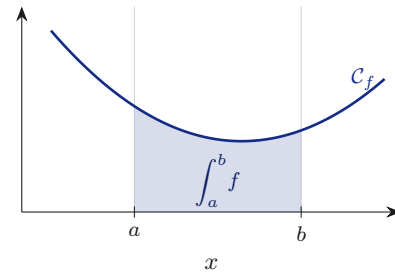


Figure 1 — Pour $f \geq 0$, l'intégrale mesure l'aire sous la courbe.

2 THÉORÈME FONDAMENTAL ET CALCUL D'UNE INTÉGRALE

Théorème — fondamental. Si f est continue sur un intervalle I et si $a \in I$, la fonction $F_a : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est dérivable sur I , de dérivée f : c'est l'**unique primitive de f sur I qui s'annule en a** . (Démonstration exigible lorsque f est positive et croissante ; admis dans le cas général.)

Propriété — calcul. Si F est une primitive quelconque de f sur I , alors pour tous a et b de I :

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Le résultat ne dépend pas de la primitive choisie. Cette formule définit aussi $\int_a^b f$ lorsque f **change de signe** et lorsque $b < a$; en particulier $\int_a^a f = 0$ et $\int_b^a f = -\int_a^b f$.

3 PROPRIÉTÉS DE L'INTÉGRALE

■ **FORMULAIRE** — f et g continues sur $[a; b]$, avec $a \leq b$, et α, β réels

- **Linéarité** : $\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx$.
- **Relation de Chasles** : pour tout c de l'intervalle, $\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$.
- **Positivité et inégalités** : si $f \geq 0$ sur $[a; b]$, alors $\int_a^b f(x) dx \geq 0$; si $f \leq g$ sur $[a; b]$, alors $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$.
- **Encadrement** : si $m \leq f \leq M$ sur $[a; b]$, alors $m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$.

4 VALEUR MOYENNE ET AIRE ENTRE DEUX COURBES

Définition. La **valeur moyenne** de f sur $[a; b]$ (avec $a < b$) est le réel $\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$: si $f \geq 0$, c'est la hauteur du rectangle de base $b-a$ ayant la même aire que le domaine sous la courbe. Si $m \leq f \leq M$, alors $m \leq \mu \leq M$.

Propriété — aire entre deux courbes. Si $f \geq g$ sur $[a; b]$, l'aire entre C_f et C_g vaut $\int_a^b (f(x) - g(x)) dx$ u.a. Si $f - g$ change de signe, découper $[a; b]$ selon le signe de $f - g$ (Chasles) et ajouter les aires de chaque morceau. De même, l'aire entre C_f et l'axe des abscisses s'obtient en changeant le signe des intégrales sur les intervalles où $f \leq 0$.

5 INTÉGRATION PAR PARTIES

Théorème. Si u et v sont dérivables sur $[a; b]$, de dérivées continues, alors (intégrer $(uv)' = u'v + uv'$ entre a et b) :

$$\int_a^b u(x) v'(x) dx = [u(x) v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x) v(x) dx.$$

Méthode — choix de u et de v' . Prendre u tel que u' soit *plus simple* que u ($x, x^2, \ln x$) et v' dont on connaît une primitive ($e^x, \sin x, \cos x$).

6 ENCADREMENT, APPROXIMATION ET SUITES D'INTÉGRALES

Méthode — méthode des rectangles. Avec $h = \frac{b-a}{n}$ et f croissante : $h \sum_{k=0}^{n-1} f(a + kh) \leq \int_a^b f \leq h \sum_{k=1}^n f(a + kh)$, d'amplitude $h(f(b) - f(a))$; les trapèzes moyennent ces deux sommes.

Méthode — suite d'intégrales I_n . Comparer f_{n+1} et f_n puis intégrer l'inégalité (monotonie); encadrer f_n pour majorer I_n et obtenir sa limite; une intégration par parties donne souvent une relation entre I_{n+1} et I_n .

7 SAVOIR-FAIRE DU CHAPITRE

► SAVOIR-FAIRE

- Interpréter une intégrale comme une aire en unités d'aire et convertir en cm^2 .
- Calculer une intégrale à l'aide d'une primitive, même si f change de signe; calculer une aire entre deux courbes.
- Encadrer ou majorer une intégrale; calculer une valeur moyenne et l'interpréter en contexte.
- Mener une intégration par parties, éventuellement deux fois de suite.
- Étudier une suite d'intégrales : variations, encadrement, récurrence, limite.

8 EXEMPLES TYPES

★ EXEMPLE — calcul par une primitive

$I = \int_0^1 (3x^2 + e^{-x}) dx$: $F(x) = x^3 - e^{-x}$ est une primitive, donc $I = F(1) - F(0) = (1 - e^{-1}) + 1 = 2 - e^{-1} \approx 1,632$.

★ EXEMPLE — aire entre deux courbes

$f(x) = 4 - x^2, g(x) = x + 2$: $f - g = -(x - 1)(x + 2) \geq 0$ sur $[-2; 1]$, d'où l'aire $\int_{-2}^1 (-x^2 - x + 2) dx = \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x\right]_{-2}^1 = \frac{7}{6} + \frac{10}{3} = \frac{9}{2}$ u.a.

★ EXEMPLE — intégration par parties

$J = \int_1^e \ln x dx$: on pose $u(x) = \ln x, v'(x) = 1$, d'où $u'(x) = \frac{1}{x}$ et $v(x) = x$. Alors $J = [x \ln x]_1^e - \int_1^e 1 dx = e - (e - 1) = 1$. La valeur moyenne de $\ln$ sur $[1; e]$ vaut donc $\frac{1}{e-1} \approx 0,582$.

✗ PIÈGES

- « Intégrale = aire » n'est vrai que si $f \geq 0$: sinon l'intégrale est une aire *algébrique*.
- $\int_a^b f(x)g(x) dx \neq \int_a^b f \times \int_a^b g$: la linéarité ne porte ni sur les produits ni sur les quotients.
- Ne pas oublier le dx ni les crochets; soustraire dans le bon ordre $F(b) - F(a)$; en intégrant par parties, ne pas confondre v et v' ni oublier le signe « moins ».