

TERMINALE SPÉCIALITÉ · MATHÉMATIQUES · ANALYSE · CHAPITRE 10



R. RINGUET · 2026 – 2027

Exercices 2 Calcul intégral

Problèmes : distance, température moyenne, aire d'un vitrail, stock, méthodes numériques, énergie

7 exercices · niveau ●●○ · durée conseillée : 2 h 30 · calculatrice autorisée

★ À RETENIR — Ce qu'il faut savoir faire à la fin de la feuille

- Interpréter et calculer une intégrale ou une valeur moyenne dans un contexte concret (distance, température, stock, énergie) ; calculer une aire entre deux courbes et la convertir en unités usuelles.
- Encadrer une intégrale par la méthode des rectangles, l'approcher par la méthode des trapèzes, programmer ces méthodes en Python ; calculer une intégrale par parties.

► MÉTHODE — L'intégration par parties

Si u et v sont dérivables sur $[a ; b]$ avec u' et v' continues, alors $(uv)' = u'v + uv'$, donc en intégrant entre a et b :

$$\int_a^b u(x) v'(x) dx = [u(x) v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x) v(x) dx.$$

On choisit u de façon que u' soit *plus simple* que u (souvent $u(x) = x$ ou $u(x) = \ln x$), et v' de façon à en connaître une primitive.

Exercice 1 La distance parcourue par un sprinteur

●●○

La vitesse d'un sprinteur, en $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$, est modélisée pour $t \geq 0$ (en secondes) par $v(t) = 9(1 - e^{-0,4t})$. La distance parcourue entre les instants 0 et 12, en mètres, est $\int_0^{12} v(t) dt$.

- 1.1 Étudier les variations de v sur $[0 ; 12]$ et déterminer $\lim_{t \rightarrow +\infty} v(t)$. Interpréter cette limite.
- 1.2 Calculer $v(2)$, $v(4)$, $v(6)$, $v(8)$, $v(10)$ et $v(12)$, arrondis à 10^{-2} .
- 1.3 Sur chaque intervalle $[t_k ; t_k + 2]$, où $t_k = 2k$ (k entier de 0 à 5), on remplace l'aire sous la courbe par celle du trapèze correspondant (figure 1), égale à $(v(t_k) + v(t_k + 2))$. En déduire une valeur approchée de la distance parcourue en 12 s.
- 1.4 Vérifier que $t \mapsto 9(t + 2,5e^{-0,4t})$ est une primitive de v , puis calculer la valeur exacte de $\int_0^{12} v(t) dt$ et son arrondi à 10^{-2} .
- 1.5 Montrer que v est concave sur $[0 ; 12]$. En déduire pourquoi la méthode des trapèzes *sous-estime* ici la distance parcourue.
- 1.6 Calculer la vitesse moyenne du sprinteur sur $[0 ; 12]$, arrondie à 10^{-2} , en $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ puis en $\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$.

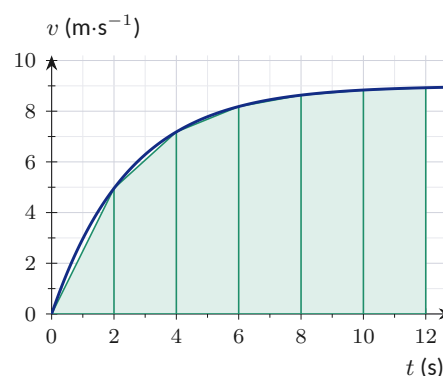


Figure 1 — Les six trapèzes sous C_v

Exercice 2 La température moyenne d'une journée



Un relevé météorologique montre que la température, en degrés Celsius, d'une journée de printemps est correctement modélisée par $T(t) = 14 - 6 \cos\left(\frac{\pi t}{12}\right)$, où t désigne le temps écoulé en heures depuis minuit, $t \in [0; 24]$.

- 2.1 Calculer $T'(t)$, puis étudier les variations de T sur $[0; 24]$. Préciser la température minimale et la température maximale de la journée ainsi que les heures correspondantes.
- 2.2 Vérifier que la fonction G définie par $G(t) = 14t - \frac{72}{\pi} \sin\left(\frac{\pi t}{12}\right)$ est une primitive de T sur $[0; 24]$.
- 2.3 Calculer la température moyenne de la journée, c'est-à-dire la valeur moyenne de T sur $[0; 24]$. Que remarque-t-on?
- 2.4 Calculer de même la valeur moyenne de T sur $[8; 16]$: valeur exacte, puis arrondi à 10^{-1} .
- 2.5 Résoudre $T(t) \geq 17$ sur $[0; 24]$: pendant combien d'heures la température a-t-elle dépassé 17°C ? Est-ce cohérent avec la question 2.4?

Exercice 3 Le vitrail



Un maître verrier dessine un vitrail dont le contour est délimité, dans un repère orthonormé d'unité 10 cm, par les courbes des fonctions f et g définies sur $[0; 4]$ par

$$f(x) = -x^2 + 6x \quad \text{et} \quad g(x) = x^2 - 2x.$$

- 3.1 Résoudre l'équation $f(x) = g(x)$ sur $[0; 4]$, puis étudier le signe de $f(x) - g(x)$ sur $[0; 4]$. En déduire la position relative des deux courbes.
- 3.2 Calculer l'aire du vitrail en unités d'aire, puis en cm^2 et en m^2 (arrondir à 10^{-3}). Le verre coloré coûtant 45 € le mètre carré, calculer le prix du verre nécessaire au centime près (à partir de l'aire exacte).
- 3.3 On appelle *hauteur moyenne* du vitrail la valeur moyenne de $f - g$ sur $[0; 4]$. La calculer en unités, puis en centimètres.

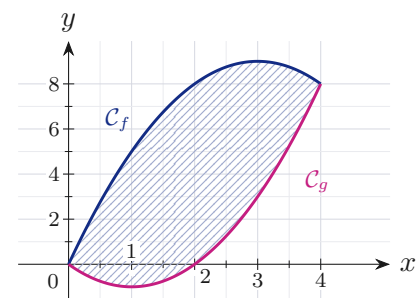


Figure 2 — Le contour du vitrail (pas à l'échelle)

Exercice 4 Le stock d'un entrepôt



Un entrepôt contient 200 t de céréales au début d'une campagne de 4 j. Le *débit net* d'entrée, en tonnes par jour, est modélisé pour $t \in [0; 4]$ par $f(t) = -3t^2 + 12t - 9$ (figure 3). Le stock, en tonnes, est alors $S(t) = 200 + \int_0^t f(u) du$.

- 4.1 Factoriser $f(t)$, puis étudier son signe sur $[0; 4]$. Interpréter concrètement les trois périodes obtenues.
- 4.2 Démontrer que, pour tout $t \in [0; 4]$, $S(t) = 200 - t^3 + 6t^2 - 9t$.
- 4.3 Justifier que S est dérivable avec $S' = f$, puis dresser le tableau de variations de S sur $[0; 4]$. Préciser le stock minimal et le stock maximal, ainsi que les jours correspondants.
- 4.4 Calculer $\int_0^1 f(u) du$, $\int_1^3 f(u) du$ et $\int_3^4 f(u) du$. Que remarque-t-on? Interpréter ces trois nombres comme des aires, puis en termes de céréales. Expliquer alors pourquoi $S(3) = S(0)$.
- 4.5 Calculer le stock moyen de l'entrepôt sur $[0; 4]$.

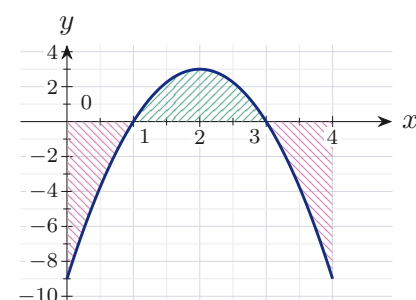


Figure 3 — Le débit net f (en $\text{t} \cdot \text{j}^{-1}$)

Exercice 5 Encadrer une intégrale qu'on ne sait pas calculer



La fonction $f : x \mapsto e^{-x^2}$ joue un rôle central en statistique, mais aucune de ses primitives ne s'exprime à l'aide des fonctions usuelles : on ne peut qu'*approcher* le nombre $I = \int_0^1 e^{-x^2} dx$.

5.1 Étudier les variations de f sur $[0; 1]$. En déduire que, pour tout $x \in [0; 1]$, $e^{-1} \leq f(x) \leq 1$, puis un premier encadrement de I .

5.2 On partage $[0; 1]$ en quatre intervalles de longueur 0,25. Calculer la somme S des aires des rectangles construits sur les valeurs à gauche et la somme s de ceux construits sur les valeurs à droite (arrondir à 10^{-4}). En déduire un encadrement de I , puis la valeur approchée de I donnée par la méthode des trapèzes.

5.3 Recopier et compléter les lignes 7 et 8 de la fonction rectangles ci-contre, qui renvoie le couple $(s; S)$ obtenu avec n sous-intervalles.

5.4 Démontrer que, pour n sous-intervalles, $S - s = \frac{1 - e^{-1}}{n}$. Déterminer le plus petit entier n pour lequel l'amplitude de l'encadrement est inférieure à 10^{-3} .

```

1  from math import exp
2
3  def rectangles(n):
4      h = 1/n
5      s, S = 0, 0
6      for k in range(n):
7          S = S + ...
8          s = s + ...
9      return (s, S)

```

Exercice 6 S'entraîner à l'intégration par parties



Calculer la valeur exacte de chacune des intégrales suivantes à l'aide d'une intégration par parties (deux seront nécessaires pour la dernière).

a) $\int_0^1 x e^x dx$

b) $\int_1^e \ln x dx$

c) $\int_0^\pi x \sin x dx$

d) $\int_1^2 x \ln x dx$

e) $\int_0^1 (x+1) e^{-x} dx$

f) $\int_0^1 x^2 e^x dx$

Exercice 7 L'énergie produite par des panneaux solaires



Une installation photovoltaïque domestique (une dizaine de panneaux sur un toit) produit, lors d'une journée d'été sans nuage, une puissance électrique modélisée par $P(t) = 3 \sin\left(\frac{\pi t}{12}\right)$, exprimée en kilowatts, où t est le temps écoulé en heures depuis 6 h du matin, $t \in [0; 12]$. L'énergie produite entre les instants t_1 et t_2 , en kilowattheures, est $\int_{t_1}^{t_2} P(t) dt$.

7.1 Étudier les variations de P sur $[0; 12]$. Quelle est la puissance maximale de l'installation, et à quelle heure est-elle atteinte ?

7.2 Déterminer une primitive de P , puis calculer l'énergie produite sur toute la journée et la puissance moyenne de l'installation (valeurs exactes, puis arrondies à 10^{-2}).

7.3 Résoudre $P(t) \geq 1,5$ sur $[0; 12]$: entre quelles heures l'installation fournit-elle au moins 1,5 kW ? Calculer l'énergie produite pendant cette période (valeur exacte, puis arrondi à 10^{-2}) et le pourcentage de la production journalière qu'elle représente (arrondi à 10^{-1}).

7.4 Le foyer équipé consomme en moyenne 18 kW·h par jour. L'installation couvre-t-elle ce besoin lors d'une telle journée ? Cet argument suffit-il à conclure que le foyer peut se passer du réseau électrique ? Justifier.