

TERMINALE SPÉCIALITÉ · MATHÉMATIQUES · ANALYSE · CHAPITRE 10



R. RINGUET · 2026 – 2027

Contrôle B Calcul intégral

Vrai ou faux, intégration par parties, aires et convexité, suite d'intégrales

Durée : 1 h · calculatrice autorisée · 4 exercices indépendants · barème sur 20

Nom : Prénom : Classe : Note : /20

★ CONSIGNES

Une affirmation déclarée fausse doit être réfutée par un contre-exemple explicite ou par un calcul. Pour chaque intégration par parties, les fonctions u et v' choisies seront clairement indiquées. La qualité de la rédaction est prise en compte dans la notation.

Exercice 1 Vrai ou faux ?

4 pts ●●○

Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse et **justifier** la réponse. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

- 1.1 Affirmation :** « si f est continue sur $[0 ; 2]$ et si $\int_0^2 f(x) dx = 0$, alors f est la fonction nulle sur $[0 ; 2]$ ».
- 1.2 Affirmation :** « pour tout réel $x > 0$, $\int_1^x \frac{1}{t} dt = \ln x$ ».
- 1.3 Affirmation :** « la valeur moyenne de la fonction carré sur $[0 ; 3]$ est égale à 3 ».
- 1.4 Affirmation :** « l'aire, en unités d'aire, du domaine compris entre la courbe de la fonction cube et l'axe des abscisses sur $[-1 ; 1]$ est égale à $\int_{-1}^1 x^3 dx$ ».

Exercice 2 Cinq intégrations par parties

5 pts ●●○

Calculer la valeur exacte de chacune des intégrales suivantes ; deux intégrations par parties successives seront nécessaires pour la dernière.

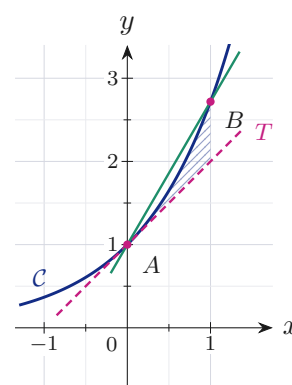
- a) $\int_0^1 (2x + 1) e^{2x} dx$ b) $\int_1^e x^2 \ln x dx$ c) $\int_0^{\pi/2} x \cos x dx$
- d) $\int_0^1 x e^{-2x} dx$ e) $\int_1^e (\ln x)^2 dx$

Exercice 3 Autour de la courbe de l'exponentielle

5 pts ●●○

On note $\mathcal{C}$ la courbe de la fonction exponentielle dans un repère ortho-normé, A et B les points de $\mathcal{C}$ d'abscisses respectives 0 et 1 (figure 1).

- 3.1** Déterminer une équation de la tangente T à $\mathcal{C}$ au point A . Justifier que la fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$, puis en déduire que $e^x \geq x + 1$ pour tout réel x .
- 3.2** Calculer l'aire $\mathcal{A}_1$, en unités d'aire, du domaine compris entre $\mathcal{C}$ et T pour $x \in [0 ; 1]$ (valeur exacte, puis arrondi à 10^{-4}).
- 3.3** Déterminer une équation de la droite (AB) , puis calculer de même l'aire $\mathcal{A}_2$ du domaine compris entre (AB) et $\mathcal{C}$ pour $x \in [0 ; 1]$.
- 3.4** Vérifier que $\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2$ est l'aire du domaine compris entre T et (AB) sur $[0 ; 1]$, et l'expliquer sur la figure.

Figure 1 — $\mathcal{C}$, la tangente T et la corde (AB)

Exercice 4 Une suite d'intégrales

6 pts ●●●

Pour tout entier naturel n , on pose $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx$.

4.1 Calculer I_0 (valeur exacte).

4.2 Justifier que, pour tout entier naturel n et tout $x \in [0; 1]$, $0 \leq x^n e^{-x} \leq x^n$. En déduire que $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$, puis déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

4.3 Démontrer que la suite (I_n) est décroissante.

4.4 À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que, pour tout entier naturel n ,

$$I_{n+1} = (n+1) I_n - \frac{1}{e}.$$

4.5 En déduire les valeurs exactes de I_1 et de I_2 , ainsi que leurs arrondis à 10^{-4} .

4.6 Interpréter I_n comme une aire sur la figure 2, puis expliquer graphiquement la décroissance de la suite (I_n) .

4.7 La fonction Python ci-contre repose sur la relation de récurrence de la question 4.4. Recopier et compléter la ligne 6, puis donner la valeur renvoyée par $I(5)$, arrondie à 10^{-4} . Est-elle compatible avec l'encadrement de la question 4.2?

4.8 À l'aide de la question 4.2 uniquement, proposer un entier n pour lequel on est certain que $I_n \leq 0,01$.

```
1 from math import exp
2
3 def I(n):
4     val = 1 - exp(-1)
5     for k in range(n):
6         val = ...
7     return val
```

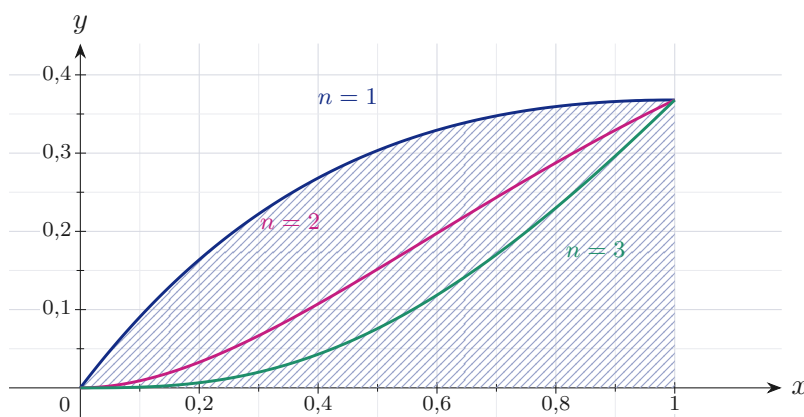


Figure 2 — Les courbes de $x \mapsto x^n e^{-x}$ sur $[0; 1]$ pour $n = 1, 2$ et 3