

Approfondissement Calcul intégral

Pour aller plus loin : démonstrations du cours, suites d'intégrales, sommes de Riemann, Monte-Carlo, majorations

5 exercices · niveau ●●● · durée conseillée : 2 h 30 · calculatrice autorisée

Exercice 1 Les deux démonstrations du cours



Partie A — Le théorème fondamental pour une fonction croissante

Soit f continue, positive et croissante sur $[a; b]$. Pour $x \in [a; b]$, on note $F(x)$ l'aire, en u.a., du domaine situé sous $\mathcal{C}_f$ entre les abscisses a et x ; ainsi $F(a) = 0$.

- 1.1** Soit $x \in [a; b]$ et soit $h > 0$ tel que $x + h \leq b$. En encadrant le domaine correspondant par les deux rectangles de la figure 1, justifier que

$$h f(x) \leq F(x+h) - F(x) \leq h f(x+h).$$

- 1.2** En déduire un encadrement du taux d'accroissement $\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$, puis, grâce à la continuité de f en x , sa limite quand h tend vers 0 par valeurs positives.

- 1.3** On admet le même raisonnement pour $h < 0$. Conclure : F est dérivable et $F' = f$. À quelle primitive de f la fonction F est-elle égale ?

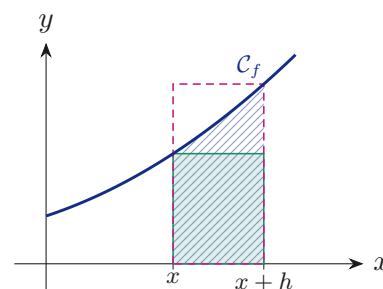


Figure 1 — Encadrement de $F(x+h) - F(x)$

Partie B — La formule d'intégration par parties

- 1.4** Soient u et v deux fonctions dérivables sur $[a; b]$, de dérivées continues. Exprimer $(uv)'$, puis intégrer cette égalité entre a et b pour démontrer que

$$\int_a^b u(x) v'(x) dx = [u(x) v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x) v(x) dx.$$

- 1.5 Application.** Calculer $\int_0^1 x e^{2x} dx$ (valeur exacte).

Exercice 2 Une suite d'intégrales sans calcul de primitive



Pour tout entier naturel n , on pose $J_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$.

- 2.1** Calculer J_0 (valeur exacte).
- 2.2** Démontrer que $J_n + J_{n+1} = \frac{1}{n+1}$ (remarquer que $\frac{x^n}{1+x} + \frac{x^{n+1}}{1+x} = x^n$), puis en déduire les valeurs exactes de J_1, J_2 et J_3 .
- 2.3** Démontrer que la suite (J_n) est positive et décroissante.
- 2.4** En déduire, à l'aide de la question 2.2, que $\frac{1}{2(n+1)} \leq J_n \leq \frac{1}{2n}$ pour tout entier $n \geq 1$, puis déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} n J_n$.

Exercice 3 Encadrer une somme par une intégrale (pour aller plus loin)

Pour $n \geq 1$, on pose $u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$, et on note $f : x \mapsto \frac{1}{1+x}$ sur $[0; 1]$.

3.1 Calculer u_1 , u_2 et u_3 (valeurs exactes).

3.2 Vérifier que $u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$: c'est la somme des aires des n rectangles sous C_f (figure 2, tracée pour $n = 5$).

3.3 Justifier que f est décroissante sur $[0; 1]$, puis que pour tout $k \in \{1; \dots; n\}$,

$$\frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x) dx \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{k-1}{n}\right).$$

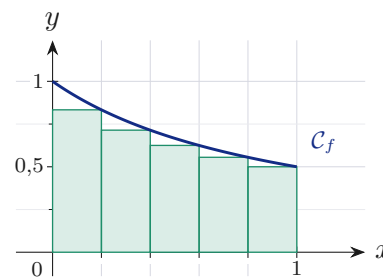


Figure 2 — Les 5 rectangles sous C_f

3.4 Calculer $\int_0^1 f(x) dx$, puis en sommant les inégalités précédentes, démontrer que $u_n \leq \ln 2 \leq u_n + \frac{1}{2n}$.

3.5 En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$, puis le plus petit entier n pour lequel l'encadrement de la question 3.4 garantit $|u_n - \ln 2| \leq 10^{-3}$.

Exercice 4 La méthode de Monte-Carlo

On souhaite estimer $A = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$, dont on ne connaît pas de primitive au programme.

4.1 Justifier, par une interprétation géométrique, que $A = \frac{\pi}{4}$.

4.2 On tire au hasard N points uniformément dans le carré $[0; 1] \times [0; 1]$, d'aire 1. Expliquer pourquoi la proportion p de ceux qui vérifient $x^2 + y^2 \leq 1$ estime A , et comment en déduire une estimation de π .

4.3 Recopier et compléter les lignes 7 et 9 de la fonction monte_carlo ci-contre, qui renvoie cette estimation de π . Une simulation avec $N = 10\,000$ a donné 7 854 points vérifiant $x^2 + y^2 \leq 1$: quelle estimation de π obtient-on ?

4.4 Calculer la valeur approchée de A donnée par la méthode des trapèzes avec quatre sous-intervalles (arrondir à 10^{-4}), puis l'estimation de π correspondante. Pourquoi est-elle si médiocre ? (Étudier la dérivée de $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ près de 1.)

```

1 from random import random
2
3 def monte_carlo(N):
4     c = 0
5     for i in range(N):
6         x, y = random(), random()
7         if ... :
8             c = c + 1
9     return ...

```

Exercice 5 L'inégalité de la moyenne

On pose $I = \int_0^1 e^{x^2} dx$, que l'on va encadrer de plus en plus finement (aucune primitive de $x \mapsto e^{x^2}$ ne s'exprime à l'aide des fonctions usuelles).

5.1 Soit f continue sur $[a; b]$ ($a < b$), avec $m \leq f \leq M$ sur $[a; b]$. Démontrer que $m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$, puis traduire cette inégalité pour la valeur moyenne de f .

5.2 Appliquer ce résultat sur $[0; 1]$: encadrement de I et amplitude (arrondie à 10^{-3}). Recommencer sur $[0; \frac{1}{2}]$ puis $[\frac{1}{2}; 1]$ avec la relation de Chasles : l'amplitude a-t-elle diminué ?

5.3 Démontrer que $e^u \geq 1 + u$ pour tout réel u (convexité de l'exponentielle) et en déduire que $I \geq \frac{4}{3}$. On admet par ailleurs que $e^u \leq 1 + u + u^2$ pour $u \in [0; 1]$: en déduire que $I \leq \frac{23}{15}$, puis l'amplitude de ce troisième encadrement, une valeur approchée de I et la précision garantie.