

SECONDE · MATHÉMATIQUES · CHAPITRE 9

Fiche de cours Variations et extremums

L'essentiel du chapitre en deux pages

définitions · propriétés · méthodes · à savoir par cœur



R. RINGUET · 2026 - 2027

1 SENS DE VARIATION SUR UN INTERVALLE

Définition. Soit f une fonction définie sur un **intervalle** I . On dit que f est **croissante** sur I lorsque, pour tous réels a et b de I , $a < b \implies f(a) \leq f(b)$: f conserve l'ordre. On dit que f est **décroissante** sur I lorsque $a < b \implies f(a) \geq f(b)$: f inverse l'ordre.

Notation. La variation est dite **stricte** lorsque les inégalités sur les images sont strictes ($f(a) < f(b)$ ou $f(a) > f(b)$). Une fonction croissante sur I ou décroissante sur I est dite **monotone** sur I . Une fonction **constante** sur I est à la fois croissante et décroissante.

Remarque. Le sens de variation se donne *toujours* sur un intervalle, jamais sur une réunion d'intervalles : la fonction inverse est décroissante sur $] -\infty ; 0[$ et sur $] 0 ; +\infty[$, mais pas sur $\mathbb{R}^*$.

2 TABLEAU DE VARIATIONS, EXTREMUMS

Définition. Le **tableau de variations** de f résume ses variations : la première ligne donne les bornes des intervalles sur lesquels f est monotone, la seconde une flèche montante (croissance) ou descendante (décroissance) et les valeurs de f aux bornes.

Notation — convention. Une flèche signifie que f est **strictement** monotone et que sa courbe se trace sans lever le crayon : f prend une seule fois chaque valeur comprise entre celles écrites à ses extrémités.

Définition. Soit f définie sur I et x_0 un réel de I . f admet un **maximum** M sur I , atteint en x_0 , lorsque $f(x_0) = M$ et $f(x) \leq M$ pour tout x de I . Elle admet un **minimum** m , atteint en x_0 , lorsque $f(x_0) = m$ et $f(x) \geq m$ pour tout x de I . Un maximum ou un minimum est appelé **extremum**.

Remarque. Un extremum est une *valeur* de f (une ordonnée) ; il est atteint en une *valeur* de x (une abscisse). Il faut donner les deux.

x	-3	1	5
$f(x)$	6	-2	4

Tableau 1 — Sur $[-3 ; 5]$, f décroît puis croît. Son minimum vaut -2 , atteint en 1 ; son maximum vaut 6 , atteint en -3 .

3 COMPARER DEUX IMAGES, IMAGE D'UN INTERVALLE

Méthode — comparer $f(a)$ et $f(b)$ sans calculer. Vérifier que a et b appartiennent à un *même* intervalle de monotonie, ranger a et b , puis appliquer le sens de variation : si f est croissante et $a < b$, alors $f(a) \leq f(b)$; si f est décroissante, $f(a) \geq f(b)$. Si a et b ne sont pas dans le même intervalle, le sens de variation ne suffit plus : il faut calculer les images, ou les situer à l'aide des valeurs du tableau de variations.

Propriété — encadrement, image d'un intervalle. Si f est croissante sur $[a ; b]$, alors $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$ pour tout x de $[a ; b]$ (décroissante : $f(b) \leq f(x) \leq f(a)$) : c'est la méthode pour **encadrer** $f(x)$. Si de plus la courbe se trace sans lever le crayon, $f(x)$ prend toutes les valeurs entre $f(a)$ et $f(b)$: cet intervalle est l'**image** de $[a ; b]$ par f .

4 VARIATIONS DES FONCTIONS DE RÉFÉRENCE

Propriété — fonction affine. Soit $f(x) = mx + p$. Pour tous réels $a \neq b$, le **taux d'accroissement** $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = m$: il est constant. Si $m > 0$, f est croissante sur $\mathbb{R}$; si $m < 0$, décroissante sur $\mathbb{R}$; si $m = 0$, constante. Une fonction affine non constante n'a ni maximum ni minimum sur $\mathbb{R}$; sur un intervalle $[a ; b]$, ses extremums sont atteints aux bornes a et b .

Propriété. Les fonctions **carré** et **valeur absolue** sont décroissantes sur $] -\infty ; 0]$ et croissantes sur $[0 ; +\infty[$; leur minimum sur $\mathbb{R}$ vaut 0 , atteint en 0 . Les fonctions **racine carrée** (sur $[0 ; +\infty[$) et **cube** (sur $\mathbb{R}$) sont croissantes. La fonction **inverse** est décroissante sur $] -\infty ; 0[$ et sur $] 0 ; +\infty[$; elle n'a ni maximum ni minimum.

Remarque. Démonstration pour la fonction carré sur $[0 ; +\infty[$: si $0 \leq a < b$, alors $b^2 - a^2 = (b - a)(b + a) > 0$, donc $a^2 < b^2$.

5 OPTIMISER : LECTURE GRAPHIQUE, CALCULATRICE, PYTHON

Méthode — résoudre un problème d'optimisation. 1. Choisir la variable x et préciser l'intervalle I qu'elle décrit. 2. Exprimer en fonction de x la quantité à optimiser (aire, volume, bénéfice, coût). 3. Déterminer le sens de variation de cette fonction sur I (tableau de variations, courbe tracée à la calculatrice, balayage) et conclure en donnant l'extremum et la valeur de x où il est atteint.

Méthode — balayage. On parcourt l'intervalle avec un **pas** constant et on retient la valeur de x donnant la plus grande image : le programme ci-contre teste $x = 0 ; 0,1 ; \dots ; 10$ et affiche $5,0 \ 25,0$.

Méthode — dichotomie. Pour approcher une solution de $f(x) = 0$ sur $[a ; b]$ où f change de signe (courbe tracée sans lever le crayon) : calculer $m = \frac{a+b}{2}$, conserver celle des deux moitiés aux bornes de laquelle f change encore de signe, et recommencer. L'amplitude de l'encadrement est *divisée par 2* à chaque étape.

```

1 def f(x):
2     return x*(10 - x)
3
4 xmax = 0
5 for k in range(101):
6     x = k*0.1
7     if f(x) > f(xmax):
8         xmax = x
9 print(xmax, f(xmax))

```

Programme 1 — Recherche du maximum de $x \mapsto x(10 - x)$ sur $[0 ; 10]$ par balayage de pas 0,1.

6 SAVOIR-FAIRE DU CHAPITRE

► SAVOIR-FAIRE

- Lire un tableau de variations : intervalles de monotonie, extremums et valeurs où ils sont atteints, nombre de solutions de $f(x) = k$.
- Dresser un tableau de variations à partir d'une courbe, d'un texte ou d'un tableau de valeurs.
- Comparer $f(a)$ et $f(b)$ sans les calculer, et encadrer $f(x)$ à partir d'un encadrement de x .
- Calculer le taux d'accroissement d'une fonction affine et en déduire son sens de variation ; démontrer les variations de la fonction carré.
- Résoudre un problème d'optimisation : mettre en fonction, étudier les variations, conclure ; utiliser un balayage ou une dichotomie en Python.

7 EXEMPLES TYPES

★ EXEMPLE — comparer sans calculer

Soit f la fonction carré. Comme $-7 < -3 \leq 0$ et que f est décroissante sur $]-\infty ; 0]$, on a $f(-7) \geq f(-3)$, c'est-à-dire $49 \geq 9$. En revanche, -3 et 2 ne sont pas dans un même intervalle de monotonie : il faut calculer pour comparer $f(-3) = 9$ et $f(2) = 4$.

★ EXEMPLE — encadrement

On suppose $2 \leq x \leq 5$. La fonction inverse est décroissante sur $]0 ; +\infty[$, donc $\frac{1}{5} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{2}$. La fonction racine carrée est croissante, donc $\sqrt{2} \leq \sqrt{x} \leq \sqrt{5}$.

★ EXEMPLE — optimisation

Un enclos rectangulaire est délimité par 20 m de grillage. En notant x la longueur d'un côté, avec $x \in]0 ; 10[$, l'autre côté mesure $10 - x$ et l'aire vaut $A(x) = x(10 - x)$. Or $A(x) = 25 - (x - 5)^2$, donc $A(x) \leq 25$, avec égalité pour $x = 5$: l'aire est maximale pour un carré de côté 5 m, et vaut alors 25 m^2 .

✗ PIÈGES

- « f est croissante » n'a de sens que sur un intervalle précisé : toujours écrire « croissante sur I ».
- Confondre le maximum (la valeur de f) et la valeur de x en laquelle il est atteint.
- Comparer $f(a)$ et $f(b)$ par le sens de variation alors que a et b sont dans deux intervalles de monotonie différents : il faut calculer ou utiliser les valeurs du tableau.
- Un tableau de variations ne donne pas l'allure exacte de la courbe : entre deux bornes, la flèche indique seulement le sens de variation.
- Un balayage ne donne qu'une valeur *approchée* de l'optimum : la précision ne dépasse pas le pas choisi.