

SECONDE · MATHÉMATIQUES · CHAPITRE 9

Exercices 2 Variations et extremums

Application : modélisation, encadrements par monotonie, optimisation, balayage en Python

6 exercices · niveau ●●○ · durée conseillée : 2 h · calculatrice autorisée



R. RINGUET · 2026 – 2027

★ À RETENIR — Ce qu'il faut savoir faire à la fin de la feuille

- Traduire une situation par une fonction, en dresser le tableau de variations, calculer et interpréter un taux d'accroissement; encadrer $f(x)$ à partir d'un encadrement de x .
- Résoudre un problème d'optimisation : tableau de valeurs à la calculatrice, conjecture, puis démonstration algébrique; comprendre et compléter un algorithme de balayage en Python.

Exercice 1 Remplissage puis vidange d'un réservoir

●●○

Un réservoir contient $V(t)$ mètres cubes d'eau à l'instant t , en heures, avec $t \in [0; 12]$. La courbe de V , ci-contre, est formée de trois segments.

1.1 Dresser le tableau de variations de V sur $[0; 12]$, puis donner son maximum et son minimum. Le maximum est-il atteint en une seule valeur de t ?

1.2 Calculer le taux d'accroissement de V entre $t = 0$ et $t = 4$, puis entre $t = 6$ et $t = 12$; interpréter ces deux nombres en précisant leur unité.

1.3 Vérifier que $V(t) = 6t + 2$ pour $t \in [0; 4]$ et que $V(t) = 44 - 3t$ pour $t \in [6; 12]$; déterminer alors, par le calcul, l'ensemble des instants pour lesquels le volume est supérieur ou égal à 20 m^3 .

1.4 Comparer, sans calcul et en justifiant : $V(1)$ et $V(2,5)$; $V(7)$ et $V(11)$; $V(4,5)$ et $V(5,5)$.

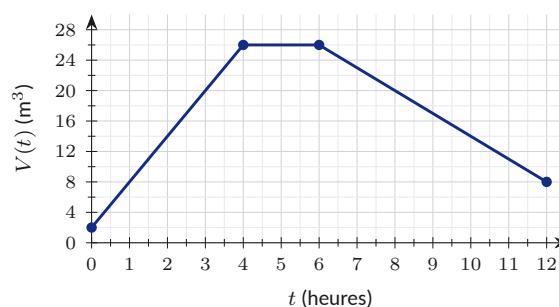


Figure 1 — Volume d'eau dans le réservoir

Exercice 2 Trois forfaits de téléphonie

●●○

Pour x gigaoctets consommés hors forfait ($x \geq 0$), un opérateur facture : forfait A, 6 € d'abonnement puis 0,80 € par gigaoctet; forfait B, 14 € puis 0,30 € par gigaoctet; forfait C, 26 € quelle que soit la consommation.

2.1 Exprimer, en fonction de x , le prix payé $f_A(x)$, $f_B(x)$ et $f_C(x)$. Pour chacune de ces trois fonctions, calculer le taux d'accroissement entre $x = 4$ et $x = 10$, puis en déduire le sens de variation sur $[0; +\infty[$.

2.2 Résoudre l'inéquation $f_B(x) < f_A(x)$. À partir de combien de gigaoctets le forfait B devient-il plus avantageux que le forfait A?

2.3 Résoudre $f_C(x) < f_B(x)$, puis $f_C(x) < f_A(x)$. Recopier et compléter : « le forfait le plus économique est A lorsque $x \in \dots$, B lorsque $x \in \dots$ et C lorsque $x \in \dots$ ».

Exercice 3 Encadrer une image

●●○

Méthode. Pour $a \leq x \leq b$: si f est croissante sur $[a; b]$, alors $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$; si elle est décroissante, $f(b) \leq f(x) \leq f(a)$; sinon, découper l'intervalle.

3.1 On sait que $3 \leq x \leq 7$. Encadrer x^2 , puis $\frac{1}{x}$, puis $|x|$, en justifiant à chaque fois par un sens de variation. Reprendre la question lorsque $-5 \leq x \leq -2$.

3.2 On sait que $-1 \leq x \leq 4$. Expliquer pourquoi on ne peut pas encadrer x^2 en appliquant directement la méthode précédente, puis donner l'encadrement de x^2 en découpant l'intervalle.

- 3.3** Un réel x vérifie $|x - 4| \leq 1$: encadrer x , puis x^2 , puis $\frac{1}{x}$.
- 3.4** Une fonction k est croissante sur $[0; 10]$, avec $k(2) = -3$ et $k(8) = 11$. Encadrer $k(5)$; peut-on en déterminer la valeur exacte ? Que dire de $k(0)$ et de $k(10)$?

Exercice 4 Aire maximale d'un rectangle de périmètre donné



On dispose de 40 cm de fil de fer pour former le contour d'un rectangle. On note x la longueur, en centimètres, de l'un des côtés de ce rectangle, et $\mathcal{A}(x)$ son aire, en centimètres carrés.

- 4.1** Justifier que le côté voisin mesure $20 - x$, que $0 < x < 20$, puis que $\mathcal{A}(x) = x(20 - x)$.
- 4.2** Compléter à la calculatrice le tableau ci-dessous, puis conjecturer la valeur de x rendant l'aire maximale, cette aire maximale et la nature du rectangle obtenu.

x	2	4	6	8	10	12	14	16	18
$\mathcal{A}(x)$									

- 4.3** Soient a et b deux réels de $]0; 20[$ tels que $a < b$. Vérifier que $\mathcal{A}(b) - \mathcal{A}(a) = (b - a)(20 - a - b)$.
- 4.4** En étudiant le signe de $20 - a - b$, en déduire le sens de variation de $\mathcal{A}$ sur $]0; 10]$, puis sur $[10; 20[$. Dresser enfin le tableau de variations de $\mathcal{A}$ sur $]0; 20[$: la conjecture de la question 4.2 est-elle démontrée ?

Exercice 5 Chercher un maximum par balayage



Une entreprise produit x centaines d'articles, avec $4 \leq x \leq 20$. Son bénéfice, en milliers d'euros, est $B(x) = -0,5x^2 + 12x - 40$. Le programme ci-contre balaye $[4; 20]$ avec un pas donné et cherche la valeur testée de x qui donne le plus grand bénéfice.

- 5.1** Calculer $B(4)$, $B(8)$, $B(12)$, $B(16)$ et $B(20)$, puis recopier et compléter les deux lignes en pointillés du programme.
- 5.2** Que renvoie `maximum(4)` ? Justifier sans machine. Combien de valeurs de x le programme teste-t-il pour un pas de 0,5 ? pour un pas de 0,25 ?
- 5.3** À la calculatrice, dresser un tableau de valeurs de B de $x = 11$ à $x = 13$ avec un pas de 0,5, puis conjecturer le bénéfice maximal et la production correspondante.
- 5.4** Montrer que $32 - B(x) = 0,5(x - 12)^2$, puis démontrer la conjecture précédente.

```

1 def B(x):
2     return -0.5 * x ** 2 + 12 * x - 40
3
4 def maximum(pas):
5     x = 4
6     xmax = 4
7     while x <= 20:
8         if ..... :
9             xmax = x
10            x = .....
11    return xmax, B(xmax)

```

Programme 1 — Recherche d'un maximum par balayage

Exercice 6 Croissance d'une plante



On mesure la hauteur $h(t)$, en centimètres, d'un plant de tournesol, t semaines après la plantation.

t (semaines)	0	2	4	6	8	10	12
$h(t)$ (cm)	2	5	11	23	38	47	50

- 6.1** Calculer le taux d'accroissement de h entre $t = 0$ et $t = 4$, entre $t = 4$ et $t = 8$, puis entre $t = 8$ et $t = 12$. Interpréter chacun de ces nombres en précisant l'unité, et dire sur quelle période la plante a poussé le plus vite.
- 6.2** La fonction h peut-elle être affine sur $[0; 12]$? Les valeurs du tableau suffisent-elles à affirmer que h est croissante sur $[0; 12]$? Justifier.
- 6.3** On admet que h est croissante sur $[0; 12]$. Encadrer $h(7)$, puis $h(11)$. Le jardinier affirme : « à la neuvième semaine, le plant mesurait plus de 40 cm » : est-ce certain ?