

SECONDE · MATHÉMATIQUES · CHAPITRE 9

Contrôle B Variations et extremums

Automatismes, vrai ou faux, image d'un intervalle, variations de la valeur absolue, aire maximale

Durée : 1 h · calculatrice interdite · 5 exercices indépendants · barème sur 20 + 1 point bonus



R. RINGUET · 2026 – 2027

Nom : Prénom : Classe : Note : /20

★ CONSIGNES

La calculatrice n'est pas autorisée. Les cinq exercices sont indépendants. Sauf dans l'exercice 1, tout résultat non justifié ne donnera aucun point : détaillez votre raisonnement. Les intervalles sont écrits à la française, avec un point-virgule. L'exercice 4 est une démonstration de cours : la qualité de la rédaction y est particulièrement prise en compte. Dans l'exercice 5, vous laisserez apparaître tous vos calculs. La question bonus, facultative, rapporte un point supplémentaire.

Exercice 1 Automatismes

3 pts ●○○

Répondre à chaque question; aucune démarche détaillée n'est attendue dans cet exercice. (0,5 point par item.)

- a) Donner le sens de variation sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie par $f(x) = 7 - 3x$.
 b) g affine, $g(-2) = 1$ et $g(6) = -7$: donner son taux d'accroissement.
 c) Comparer $(-3,6)^2$ et $(-3,1)^2$.
 d) Comparer $\frac{1}{-5}$ et $\frac{1}{-2}$.
 e) Une fonction h est croissante sur $\mathbb{R}$ et $h(4) = 9$: que peut-on dire de $h(10)$?
 f) Donner l'image de l'intervalle $[1; 3]$ par la fonction carré.

Exercice 2 Vrai ou faux

4 pts ●●○○

Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse. Si elle est vraie, la démontrer; si elle est fausse, proposer une correction ou donner un contre-exemple. (1 point par item.)

- 2.1 Si une fonction f est croissante sur $[0; 5]$ et décroissante sur $[5; 10]$, alors $f(5)$ est le maximum de f sur $[0; 10]$.
 2.2 Si une fonction f vérifie $f(1) < f(4)$, alors f est croissante sur $[1; 4]$.
 2.3 La fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
 2.4 Si f est décroissante sur $[0; 10]$, alors la fonction g définie sur $[0; 10]$ par $g(x) = f(x) + 5$ est aussi décroissante sur $[0; 10]$.

Exercice 3 Comparaisons et image d'un intervalle

4 pts ●●○○

Une fonction f est définie sur $[-6; 9]$. Elle est strictement décroissante sur $[-6; 2]$ et strictement croissante sur $[2; 9]$, et sa courbe se trace sans lever le crayon. On sait de plus que $f(-6) = 10$, $f(2) = -4$ et $f(9) = 7$.

- 3.1 Dresser le tableau de variations de f sur $[-6; 9]$. 1 pt
 3.2 Comparer, lorsque c'est possible : $f(-5)$ et $f(-1)$; $f(3)$ et $f(8)$; $f(0)$ et $f(6)$. Justifier chaque réponse. 1 pt
 3.3 Déterminer l'image de l'intervalle $[2; 9]$ par f , puis celle de l'intervalle $[-6; 2]$. En déduire l'ensemble des valeurs prises par f sur $[-6; 9]$. 1 pt

- 3.4** Combien de solutions l'équation $f(x) = 5$ admet-elle sur $[-6; 9]$? Même question pour $f(x) = 9$, puis pour $f(x) = -5$. 0,5 pt
- 3.5** Existe-t-il un réel x de $[-6; 9]$ tel que $f(x) = 12$? Et tel que $f(x) = -4$? Justifier. 0,5 pt

Exercice 4 Démonstration : les variations de la fonction valeur absolue

4 pts ●●●

Soit f la fonction valeur absolue, définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x|$.

- 4.1** Rappeler l'expression de $|x|$ sans valeur absolue, selon le signe de x . 0,5 pt
- 4.2** Soient a et b deux réels tels que $0 \leq a < b$. Exprimer $f(a)$ et $f(b)$ sans valeur absolue, puis déterminer le signe de $f(b) - f(a)$. Conclure sur le sens de variation de f sur $[0; +\infty[$. 1,5 pt
- 4.3** Soient a et b deux réels tels que $a < b \leq 0$. Reprendre la même démarche et conclure sur $] -\infty; 0]$. 1 pt
- 4.4** Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$ et préciser son minimum ainsi que la valeur en laquelle il est atteint. 0,5 pt
- 4.5** En déduire, sans calculer aucune valeur absolue, la comparaison de $|-7,2|$ et $|-6,9|$. Comparer ensuite $|3,4|$ et $|-3,8|$: le sens de variation suffit-il ici? 0,5 pt

Exercice 5 Un enclos contre un mur

5 pts ●●●

Un éleveur dispose de 60 m de grillage pour délimiter un enclos rectangulaire adossé à un long mur : le côté situé le long du mur n'est pas grillagé (figure 1). On note x la largeur de l'enclos, c'est-à-dire la longueur, en mètres, de chacun des deux côtés perpendiculaires au mur, et $\mathcal{A}(x)$ son aire, en mètres carrés.

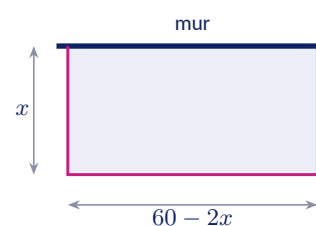


Figure 1 — L'enclos (en rose : le grillage)

- 5.1** Justifier que la longueur de l'enclos (côté parallèle au mur) est $60 - 2x$, que $0 < x < 30$, puis que $\mathcal{A}(x) = x(60 - 2x)$. 1 pt
- 5.2** Calculer $\mathcal{A}(5)$, $\mathcal{A}(10)$, $\mathcal{A}(15)$, $\mathcal{A}(20)$ et $\mathcal{A}(25)$. 0,5 pt
- 5.3** Conjecturer la valeur de x pour laquelle l'aire de l'enclos est maximale. 0,5 pt
- 5.4** Démontrer que $450 - \mathcal{A}(x) = 2(x - 15)^2$ pour tout réel x de $]0; 30[$. 1,5 pt
- 5.5** En déduire que $\mathcal{A}(x) \leq 450$ pour tout x de $]0; 30[$, puis que l'aire est maximale pour une seule valeur de x . Donner enfin les dimensions de l'enclos d'aire maximale et cette aire. 1 pt
- 5.6** L'éleveur souhaite une aire d'au moins 400 m^2 . Montrer que cette condition équivaut à $(x - 15)^2 \leq 25$, puis à $|x - 15| \leq 5$. En déduire les largeurs qui conviennent. 0,5 pt

Exercice 6 Question bonus (1 point, hors barème)

●○○

On dispose de neuf billes d'apparence identique ; l'une d'elles est légèrement plus légère que les huit autres, qui ont toutes la même masse. On dispose d'une balance à deux plateaux, sans masses marquées. Expliquer comment trouver à coup sûr la bille la plus légère en seulement **deux** pesées.