

Approfondissement Variations et extremums

Pour aller plus loin : opérations et monotonie, caractérisation des fonctions affines, distance minimale, dichotomie

5 exercices · niveau ●●● · durée conseillée : 2 h 30 · calculatrice autorisée



R. RINGUET · 2026 – 2027

Exercice 1 Opérations et sens de variation

●●●

Dans tout l'exercice, I désigne un intervalle et les fonctions considérées sont définies sur I . On revient à la **définition** : f est croissante sur I lorsque, pour tous a et b de I , $a < b \implies f(a) \leq f(b)$.

- 1.1** Soient f et g deux fonctions croissantes sur I . Démontrer que $f + g$, définie par $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, est croissante sur I , puis que $-f$ est décroissante sur I . Quel est le lien entre la courbe de f et celle de $-f$?
- 1.2** Soit f une fonction croissante et **strictement positive** sur I . Pour $a < b$ dans I , vérifier l'égalité $\frac{1}{f(b)} - \frac{1}{f(a)} = \frac{f(a) - f(b)}{f(a)f(b)}$, puis en déduire le sens de variation de $\frac{1}{f}$ sur I .
- 1.3** Soient f et g deux fonctions décroissantes sur I . Démontrer que $f + g$ est décroissante sur I . Peut-on en déduire le sens de variation de $f - g$? On pourra essayer $f(x) = -x$ et $g(x) = -2x$, puis échanger les rôles de f et de g .
- 1.4** Le produit de deux fonctions croissantes est-il croissant ? Considérer $f(x) = x$ et $g(x) = x - 3$ sur $[0; 3]$, puis calculer $(fg)(0)$, $(fg)(1)$, $(fg)(3)$.
- 1.5** En utilisant les résultats précédents, donner sans nouveau calcul le sens de variation sur $[0; +\infty[$ de $u(x) = x^2 + |x|$, de $v(x) = -x^2$ et de $w(x) = 1/(x^2 + 1)$, en citant la propriété employée ; donner de même celui de $x \mapsto 1/(x + 2)$ sur $] -2; +\infty[$.

Exercice 2 Le taux d'accroissement caractérise les fonctions affines

●●●

Pour deux réels distincts a et b , on note $\tau(a, b) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ le **taux d'accroissement** de f entre a et b .

- 2.1** Soit f la fonction affine définie par $f(x) = mx + p$. Démontrer que $\tau(a, b) = m$ pour tous réels distincts a et b .
- 2.2** *Réciproque.* Soit f définie sur $\mathbb{R}$ telle que $\tau(a, b) = k$ pour tous $a \neq b$, où k est un réel fixé. En prenant $a = 0$, démontrer que $f(x) = kx + f(0)$ pour tout $x \neq 0$, puis que cette formule vaut encore en 0. Conclure.
- 2.3** Deux fonctions sont définies par : $v(-3) = 13$, $v(0) = 4$, $v(2) = -2$, $v(5) = -11$; $w(-1) = 5$, $w(1) = 9$, $w(4) = 14$, $w(6) = 18$. Peuvent-elles être affines ? Lorsque c'est le cas, donner l'expression de la fonction.
- 2.4** Soit f la fonction carré. Démontrer que $\tau(a, b) = a + b$; retrouver que f n'est pas affine, puis son sens de variation sur $[0; +\infty[$.
- 2.5** Soit g la fonction inverse. Démontrer que $\tau(a, b) = -\frac{1}{ab}$ et retrouver le sens de variation de g sur $]0; +\infty[$.
- 2.6** Soit h la fonction valeur absolue. Calculer $\tau(a, b)$ lorsque $0 < a < b$, puis lorsque $a < b < 0$. Retrouver le sens de variation de h sur chacun de ces deux intervalles. La fonction h est-elle affine sur $\mathbb{R}$?
- 2.7** Soient f et g deux fonctions affines, de taux d'accroissement respectifs m et m' . Démontrer que $f + g$ est affine et donner son taux d'accroissement. La fonction fg est-elle affine ? On pourra prendre $f(x) = g(x) = x$.

Exercice 3 Le point d'une droite le plus proche d'un point donné



Le plan est muni d'un repère orthonormé. Soit A le point de coordonnées $(0; 3)$ et d la droite d'équation $y = x$; un point M de d a pour coordonnées $(x; x)$. On cherche la position de M rendant AM minimale.

3.1 Démontrer que $AM^2 = 2x^2 - 6x + 9$. Vérifier ensuite que $AM^2 - 4,5 = 2(x - 1,5)^2$, et en déduire que $AM^2 \geq 4,5$ pour tout réel x , l'égalité n'ayant lieu que pour une seule valeur de x , à préciser.

3.2 La fonction racine carrée étant croissante sur $[0; +\infty[$, expliquer pourquoi AM est minimale pour la même valeur de x que AM^2 . En déduire les coordonnées du point M_0 de d le plus proche de A , puis la valeur exacte de AM_0 , sous la forme $\frac{a\sqrt{2}}{b}$ avec a et b entiers.

3.3 On note O l'origine du repère. Calculer OM_0^2 et OA^2 , vérifier l'égalité $AM_0^2 + OM_0^2 = OA^2$, puis conclure pour les droites (AM_0) et d .

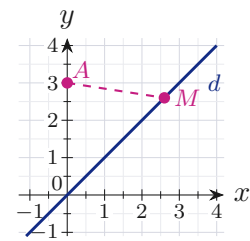


Figure 1 — Le point A et la droite d

Exercice 4 Volume maximal : balayage ou dichotomie?



Dans un carton carré de 30 cm de côté, on découpe aux quatre coins un carré de côté x , puis on relève les bords : la boîte obtenue a pour volume $V(x) = x(30 - 2x)^2$ cm³, avec $0 < x < 15$.

4.1 Calculer $V(4)$, $V(5)$ et $V(6)$; conjecturer le volume maximal de la boîte. Le programme 1 balaie $[0,1; 14,9]$ avec un pas donné : combien de valeurs teste-t-il pour un pas de 0,1? pour un pas de 0,001?

4.2 On admet que V est strictement croissante sur $]0; 5]$, strictement décroissante sur $[5; 15[$, et que sa courbe se trace sans lever le crayon. Justifier que $V(x) = 1500$ admet une unique solution α dans $]0; 5]$, avec $2 < \alpha < 3$.

4.3 Le programme 2 encadre α par *dichotomie*. Donner les valeurs de a et de b après chacune des trois premières étapes de la boucle.

4.4 Quelle est l'amplitude de $[a; b]$ après k étapes? Combien d'étapes pour une amplitude strictement inférieure à 10^{-2} ? Comparer avec le balayage de la question 4.1. Enfin, que faudrait-il modifier dans le programme 2 pour encadrer la seconde solution de $V(x) = 1500$, située dans $[5; 15[$?

```

1 def V(x):
2     return x * (30 - 2 * x) ** 2
3
4 def balayage(pas):
5     x = 0.1
6     xmax = 0.1
7     while x <= 14.9:
8         if V(x) > V(xmax):
9             xmax = x
10            x = x + pas
11    return xmax

```

Programme 1 — Balayage

```

1 def dichotomie(p):
2     a = 2
3     b = 3
4     while b - a > p:
5         m = (a + b) / 2
6         if V(m) <= 1500:
7             a = m
8         else:
9             b = m
10    return a, b

```

Programme 2 — Dichotomie

Exercice 5 Variations sans développer



Soit g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (x - 3)^2$. On veut ses variations **sans développer**, en utilisant seulement celles de la fonction carré.

5.1 Soient $a < b$: comparer $a - 3$ et $b - 3$. Si $3 \leq a < b$, justifier que $0 \leq a - 3 < b - 3$, puis, par le sens de variation de la fonction carré sur $[0; +\infty[$, comparer $g(a)$ et $g(b)$. Reprendre la démarche lorsque $a < b \leq 3$ et conclure.

5.2 Dresser le tableau de variations de g sur $\mathbb{R}$ et donner son minimum. On pose, pour tout réel x , $h(x) = 5 - (x - 3)^2$: déduire des questions précédentes et de l'exercice 1 le tableau de variations de h , puis son maximum.