

Fiche de cours

Probabilités conditionnelles et arbres pondérés

L'essentiel du chapitre en deux pages

définitions · propriétés · méthodes · à savoir par cœur

1 VOCABULAIRE DES PROBABILITÉS

Définition. Une **expérience aléatoire** a plusieurs résultats possibles, appelés **issues**, sans qu'on puisse prévoir lequel se produira. L'ensemble de toutes les issues est l'**univers**, noté Ω . Un **événement** est une partie de Ω ; un **événement élémentaire** ne contient qu'une issue.

Notation. Pour deux événements A et B : $\bar{A}$ est l'événement **contraire** de A (« A ne se réalise pas »); $A \cap B$ (« A et B ») est réalisé quand les deux le sont; $A \cup B$ (« A ou B ») quand l'un au moins l'est. A et B sont **incompatibles** lorsque $A \cap B = \emptyset$.

2 CALCULER UNE PROBABILITÉ

Définition. Une **probabilité** associe à chaque issue un nombre de $[0; 1]$, la somme de ces nombres valant 1. La probabilité d'un événement A , notée $P(A)$, est la somme des probabilités des issues qui le composent : $0 \leq P(A) \leq 1$, $P(\Omega) = 1$ et $P(\emptyset) = 0$.

Propriété — équiprobabilité. Lorsque toutes les issues ont la même probabilité, on dit qu'il y a **équiprobabilité** et, pour tout événement A ,

$$P(A) = \frac{\text{nombre d'issues de } A}{\text{nombre total d'issues}} = \frac{\text{Card } A}{\text{Card } \Omega}.$$

Propriété. Pour tous événements A et B : $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ et $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. Si A et B sont incompatibles, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

3 PROBABILITÉS CONDITIONNELLES

Définition. Soit A un événement de probabilité non nulle. La probabilité de B **sachant** A , notée $P_A(B)$, est la probabilité de B lorsqu'on se limite aux issues de A : A devient le nouvel univers.

Propriété. Dans un tableau croisé d'effectifs, $P_A(B)$ s'obtient en divisant l'effectif de $A \cap B$ par l'effectif de A (un *total-ligne* ou *-colonne*), alors que $P(A \cap B)$ s'obtient en le divisant par l'effectif *total*. On a aussi

$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) \quad \text{et} \quad P_A(B) + P_A(\bar{B}) = 1.$$

Méthode — traduire un énoncé. « parmi les A », « sachant que A », « chez les A », « lorsque A est réalisé » $\rightarrow P_A(B)$; « A et B » $\rightarrow P(A \cap B)$; « A ou B » $\rightarrow P(A \cup B)$. En général $P_A(B) \neq P_B(A)$: le mot « sachant » indique le **dénominateur**.

4 ARBRES PONDÉRÉS

Propriété — les trois règles de l'arbre. Dans un **arbre pondéré** :

- la somme des probabilités des branches issues d'un même nœud vaut 1 ;
- la probabilité d'un **chemin** est le *produit* des probabilités des branches qui le composent ;
- la probabilité d'un événement est la *somme* des probabilités des chemins qui y mènent.

Les branches du premier niveau portent $P(A)$ et $P(\bar{A})$; celles du second niveau portent des probabilités *conditionnelles*.

Méthode — passer du tableau à l'arbre. Le premier niveau reprend un caractère (fréquences marginales), le second l'autre caractère *conditionnellement* au premier. Inversement, un arbre permet de reconstituer un tableau en multipliant chaque probabilité de chemin par l'effectif total.

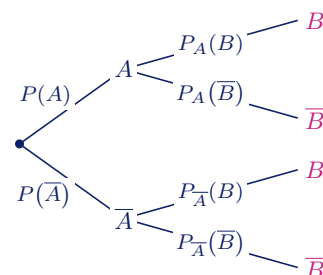


Figure 1 — Arbre pondéré à deux niveaux : le chemin du haut a pour probabilité $P(A) \times P_A(B) = P(A \cap B)$.

5 SIMULER POUR ESTIMER UNE PROBABILITÉ

Propriété — loi des grands nombres. Lorsqu'on répète un grand nombre de fois, dans les mêmes conditions, une expérience aléatoire, la **fréquence** observée d'un événement se rapproche de sa **probabilité**. C'est ce qui justifie l'estimation d'une probabilité par simulation.

Remarque. Deux simulations de même taille ne donnent pas exactement la même fréquence : il faut augmenter le nombre de répétitions pour gagner en précision. Le programme ci-contre estime la probabilité d'obtenir 7 en additionnant deux dés; la valeur exacte est $\frac{6}{36} = \frac{1}{6} \approx 0,167$.

```
1 from random import randint
2
3 n = 0
4 for k in range(10000):
5     if randint(1, 6) + randint(1, 6) == 7:
6         n = n + 1
7 print(n/10000)
```

Programme 1 — Simulation de 10 000 lancers de deux dés.

■ FORMULAIRE — Tout le chapitre en quatre lignes

- Équiprobabilité : $P(A) = \frac{\text{Card } A}{\text{Card } \Omega}$; $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$; $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
- Tableau croisé (N : effectif total) : $P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{N}$; $P_A(B) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)}$; $P_A(B) + P_A(\overline{B}) = 1$.
- Arbre : $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$ (produit le long d'un chemin) ; somme des chemins menant à un même événement ; somme des branches issues d'un nœud = 1.
- Simulation : la fréquence observée sur un grand nombre de répétitions estime la probabilité.

6 SAVOIR-FAIRE DU CHAPITRE

► SAVOIR-FAIRE

- Décrire l'univers d'une expérience aléatoire et calculer une probabilité en situation d'équiprobabilité.
- Utiliser $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$ et $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
- Calculer $P_A(B)$ à partir d'un tableau croisé ; distinguer $P(A \cap B)$, $P_A(B)$ et $P_B(A)$ et les traduire par des phrases.
- Construire ou compléter un arbre pondéré, calculer la probabilité d'un chemin puis d'un événement.
- Passer d'un tableau croisé à un arbre et inversement ; estimer une probabilité par simulation.

7 EXEMPLES TYPES

★ EXEMPLE — lecture d'un tableau croisé

Sur 500 élèves, 300 sont demi-pensionnaires (D) et, parmi eux, 120 font du théâtre (T) ; on choisit un élève au hasard. Alors $P(D) = \frac{300}{500} = 0,6$, $P(D \cap T) = \frac{120}{500} = 0,24$ et $P_D(T) = \frac{120}{300} = 0,4$. Trois nombres, trois questions distinctes.

★ EXEMPLE — arbre pondéré

Une usine a deux machines : la machine A fabrique 70 % des pièces et en produit 2 % de défectueuses ; la machine B fabrique les 30 % restants et en produit 5 % de défectueuses. On prélève une pièce au hasard. La probabilité qu'elle vienne de A et soit défectueuse est $0,70 \times 0,02 = 0,014$; celle qu'elle soit défectueuse est la somme des deux chemins : $0,014 + 0,30 \times 0,05 = 0,014 + 0,015 = 0,029$, soit 2,9 %.

★ EXEMPLE — les deux sens du conditionnement

Avec l'exemple précédent, parmi les pièces défectueuses, la proportion venant de A est $\frac{0,014}{0,029} \approx 0,48$: environ 48 %. On a donc $P_A(\text{défectueuse}) = 0,02$ mais $P_{\text{défectueuse}}(A) \approx 0,48$: les deux probabilités n'ont rien à voir.

✗ PIÈGES

- Confondre $P(A \cap B)$ (on divise par l'effectif total) et $P_A(B)$ (on divise par l'effectif de A).
- Croire que $P_A(B) = P_B(A)$: c'est faux en général (exemple ci-dessus : 0,02 et environ 0,48).
- Additionner le long d'un chemin : on *multiplie* ; on additionne les chemins menant à un même événement.
- Écrire $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ sans vérifier que A et B sont incompatibles.
- Croire qu'une fréquence obtenue par simulation est la probabilité exacte : ce n'est qu'une *estimation*.