

Exercices 1

Probabilités conditionnelles et arbres pondérés

Compléments — les bases : « parmi », notation $P_A(B)$, arbres pondérés, passage tableau $\leftrightarrow$ arbre

6 exercices · niveau ●○○ · durée conseillée : 1 h 30 · sans calculatrice

★ À RETENIR — Ce qu'il faut savoir faire à la fin de la feuille

- Lire un tableau croisé d'effectifs et y calculer une probabilité « parmi les ... », notée $P_A(B)$; distinguer $P(A \cap B)$, $P_A(B)$ et $P_B(A)$, et traduire chacune par une phrase.
- Construire ou compléter un arbre pondéré ; calculer la probabilité d'un chemin, puis d'un événement.
- Passer d'un tableau croisé à un arbre pondéré et inversement ; traiter une succession de deux épreuves, avec remise et sans remise.

■ RAPPEL — Le formulaire du chapitre

- **Probabilité conditionnelle.** $P_A(B)$ se lit « probabilité de B sachant A » : c'est la probabilité de B lorsqu'on se limite aux issues de A . Dans un tableau d'effectifs, $P_A(B)$ est le quotient de l'effectif de $A \cap B$ par celui de A , alors que $P(A \cap B)$ est le quotient de ce même effectif par l'effectif **total** : en général $P_A(B) \neq P_B(A)$. De plus $P_A(B) + P_A(\overline{B}) = 1$.
- **Arbre pondéré.** La somme des probabilités des branches issues d'un même nœud vaut 1 ; la probabilité d'un *chemin* est le **produit** des probabilités de ses branches, soit $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$; celle d'un événement est la **somme** des probabilités des chemins qui y mènent.

Exercice 1 Au self du lycée

●○○

Un lycée compte 500 élèves, répartis dans le tableau ci-contre selon qu'ils sont demi-pensionnaires ou externes et selon qu'ils sont inscrits ou non à l'atelier théâtre. On choisit un élève au hasard ; on note D : « il est demi-pensionnaire » et T : « il est inscrit à l'atelier théâtre ».

	T	$\overline{T}$	Total
D	120	180	300
$\overline{D}$	60	140	200
Total	180	320	500

- 1.1 Calculer $P(D)$, $P(T)$ et $P(D \cap T)$, sous forme de fractions irréductibles.
- 1.2 On choisit un élève **parmi les demi-pensionnaires** : quelle est la probabilité qu'il soit inscrit à l'atelier théâtre ? Cette probabilité se note $P_D(T)$.
- 1.3 On choisit un élève **parmi les inscrits au théâtre** : quelle est la probabilité qu'il soit demi-pensionnaire, et comment se note-t-elle ?
- 1.4 Les trois nombres $P(D \cap T)$, $P_D(T)$ et $P_T(D)$ sont-ils égaux ? Expliquer ce que chacun représente, puis calculer $P(D \cup T)$ et $P_{\overline{D}}(T)$.

Exercice 2 Traduire avec les bonnes notations

●○○

On interroge au hasard une personne active d'une ville. On note B : « elle prend le bus pour aller travailler » et V : « elle possède une voiture ». L'enquête indique que 50 % des personnes actives prennent le bus, que 60 % possèdent une voiture et que, **parmi celles qui possèdent une voiture**, 25 % prennent le bus.

- 2.1 Traduire ces trois informations par des égalités utilisant $P(\dots)$ ou $P_{\dots}(\dots)$, puis calculer $P(V \cap B)$ et $P_V(\overline{B})$.

- 2.2** En déduire $P_B(V)$ et traduire ce résultat par une phrase commençant par « Parmi les personnes qui prennent le bus, ... ». Pourquoi n'est-il pas étonnant que $P_V(B)$ et $P_B(V)$ soient différents ?

Exercice 3 Compléter et lire un arbre pondéré

●○○

A et B sont deux événements d'une expérience aléatoire. L'arbre pondéré de la figure 1 est incomplet.

- 3.1** Recopier l'arbre et compléter les trois probabilités manquantes. Quelle règle utilise-t-on ?
- 3.2** Calculer la probabilité des quatre chemins et vérifier que leur somme vaut 1. En déduire $P(B)$ (deux chemins), puis $P(\bar{B})$.
- 3.3** Calculer $P_B(A)$ sous forme de fraction irréductible : est-elle égale à $P_A(B)$?

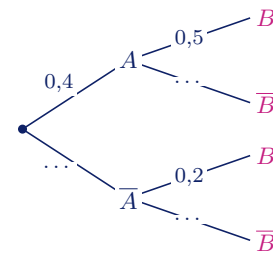


Figure 1 — Un arbre pondéré à compléter

Exercice 4 Du tableau croisé à l'arbre : la médiathèque

●○○

Une médiathèque compte 400 abonnés, répartis dans le tableau ci-contre selon leur âge (A : « adulte ») et selon qu'ils ont emprunté une bande dessinée au cours du mois (E). On choisit un abonné au hasard.

	E	$\bar{E}$	Total
A	100	150	250
$\bar{A}$	120	30	150
Total	220	180	400

- 4.1** Calculer $P(A)$ et $P(\bar{A})$, puis $P_A(E)$ et $P_{\bar{A}}(E)$, sous forme de fractions irréductibles.
- 4.2** Construire l'arbre pondéré qui commence par les branches A et $\bar{A}$, puis se poursuit par E et $\bar{E}$; y porter les six probabilités et vérifier que la somme des branches issues de chaque nœud vaut 1.
- 4.3** Calculer la probabilité du chemin qui mène à $A \cap E$ et retrouver ce résultat dans le tableau.
- 4.4** Calculer $P(E)$ de deux façons : avec le tableau, puis en ajoutant les probabilités des chemins qui mènent à E . En déduire $P_E(A)$ et comparer avec $P_A(E)$.

Exercice 5 De l'arbre au tableau : deux machines

●●○

Un atelier fabrique 400 pièces par jour : 60 % viennent de la machine M_1 , les autres de la machine M_2 . L'arbre de la figure 2 décrit une pièce prise au hasard (D : « défectueuse »).

- 5.1** Recopier et compléter les trois probabilités manquantes de l'arbre.
- 5.2** Calculer le nombre de pièces produites chaque jour par M_1 , puis par M_2 , et le nombre de pièces défectueuses de chaque provenance ; en déduire le tableau croisé des effectifs.
- 5.3** Calculer $P(D)$, puis $P_D(M_1)$. Une pièce défectueuse a-t-elle plus de chances de venir de M_1 ou de M_2 ?

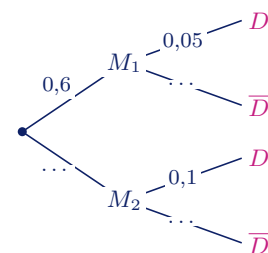


Figure 2 — Origine et qualité d'une pièce

Exercice 6 Deux tirages : avec remise, puis sans remise

●●○

Un sac contient 3 jetons rouges et 2 jetons verts, indiscernables au toucher. On tire un jeton, puis un second.

- 6.1 Avec remise** (le premier jeton est remis avant le second tirage) : construire l'arbre pondéré, puis calculer la probabilité d'obtenir deux rouges, deux verts, puis deux jetons de couleurs différentes.
- 6.2 Sans remise** : construire le nouvel arbre pondéré en justifiant les probabilités du second tirage, reprendre les trois calculs de la question 6.1, puis comparer les deux situations.