

Exercices 2

Probabilités conditionnelles et arbres pondérés

Compléments — application : tests et faux positifs, deux épreuves successives, simulation et loi des grands nombres

4 exercices · niveau ●●○ · durée conseillée : 2 h · calculatrice autorisée

★ À RETENIR — Ce qu'il faut savoir faire à la fin de la feuille

- Organiser les données d'un énoncé dans un tableau croisé ou dans un arbre pondéré, et passer de l'un à l'autre.
- Comprendre l'effet des faux positifs d'un test : comparer $P_M(T)$ et $P_T(M)$ et interpréter l'écart.
- Modéliser une succession d'épreuves par un arbre pondéré, prolonger cet arbre d'un niveau et en déduire des probabilités.
- Comprendre, compléter et exploiter un programme Python de simulation ; relier fréquence observée et probabilité.

Exercice 1 Se rendre au travail à vélo

●●○

Une enquête porte sur les 1 200 salariés d'une zone d'activité. Elle indique que 480 d'entre eux habitent à moins de 5 km de leur lieu de travail ; parmi ces derniers, 180 viennent à vélo. Parmi les salariés qui habitent à 5 km ou plus, 90 viennent à vélo. On interroge un salarié au hasard ; on note H : « il habite à moins de 5 km » et V : « il vient à vélo ».

- 1.1 Recopier et compléter le tableau croisé des effectifs (lignes $H, \overline{H}$, Total ; colonnes $V, \overline{V}$, Total).
- 1.2 Calculer $P(H)$, puis $P_H(V)$ et $P_{\overline{H}}(V)$ sous forme de fractions irréductibles, et construire l'arbre pondéré correspondant, en commençant par les branches H et $\overline{H}$.
- 1.3 Calculer $P(H \cap V)$ à l'aide de l'arbre, puis retrouver ce résultat dans le tableau. Calculer ensuite $P(V)$ en additionnant les probabilités des chemins qui mènent à V .
- 1.4 Calculer $P_V(H)$. Rédiger une phrase pour $P_H(V)$ et une phrase pour $P_V(H)$, en montrant bien que ces deux nombres ne répondent pas à la même question.

Exercice 2 Deux lancers francs

●●○

Au basket-ball, une joueuse tire deux lancers francs de suite. Elle réussit le premier avec la probabilité 0,6. Si elle a réussi le premier, elle réussit le second avec la probabilité 0,75 ; sinon, elle ne le réussit qu'avec la probabilité 0,25. On note R_1 : « elle réussit le premier lancer » et R_2 : « elle réussit le second ».

- 2.1 Traduire les trois données de l'énoncé avec les notations $P(\dots)$ et $P_{\dots}(\dots)$, puis construire l'arbre pondéré de la situation.
- 2.2 Calculer la probabilité qu'elle réussisse ses deux lancers, puis celle qu'elle les manque tous les deux. Montrer que la probabilité qu'elle en réussisse exactement un est 0,25 et vérifier que les probabilités des quatre chemins ont pour somme 1.
- 2.3 Un lancer franc rapporte un point : quelle est la probabilité qu'elle marque au moins un point ?
- 2.4 Calculer $P(R_2)$ (somme de deux chemins), puis $P_{R_2}(R_1)$ sous forme de fraction irréductible.
- 2.5 La joueuse tire un troisième lancer franc, avec la même règle (réussite avec la probabilité 0,75 si elle a réussi le deuxième, 0,25 sinon). En prolongeant l'arbre d'un niveau, calculer la probabilité qu'elle réussisse ses trois lancers, puis celle qu'elle réussisse le troisième (somme de quatre chemins).

Exercice 3 Un test de dépistage et ses faux positifs



Dans une population de 2 000 personnes, 5 % sont atteintes d'une maladie. On propose à toutes un test de dépistage. Le test est positif chez 90 % des personnes malades ; il est également positif chez 5 % des personnes non malades (ce sont les *faux positifs*). On choisit une personne au hasard ; on note M : « elle est malade » et T : « son test est positif ».

- 3.1 Traduire les données par $P(M)$, $P_M(T)$ et $P_{\overline{M}}(T)$, puis construire l'arbre pondéré de la situation.
- 3.2 Calculer le nombre de personnes malades, puis le nombre de tests positifs parmi les malades et parmi les non-malades ; présenter les résultats dans un tableau croisé d'effectifs.
- 3.3 Combien de personnes ont un test positif au total ? En déduire $P(T)$.
- 3.4 Calculer $P_T(M)$ et vérifier que $P_T(M) = \frac{18}{37}$. Montrer, sans calculatrice, que ce nombre est inférieur à $\frac{1}{2}$.
- 3.5 Comparer $P_M(T)$ et $P_T(M)$. Un journaliste écrit : « ce test est fiable à 90 % : si votre test est positif, vous avez 90 % de risques d'être malade ». Expliquer en quelques lignes pourquoi cette phrase est fausse.
- 3.6 Combien de personnes malades le test n'a-t-il pas détectées ? Calculer $P_{\overline{T}}(M)$ (valeur arrondie au millièmes).

Exercice 4 Simuler pour observer la loi des grands nombres



On lance deux dés équilibrés à six faces et on s'intéresse à l'événement E : « la somme des deux résultats est égale à 7 ».

Partie A — la probabilité exacte

- 4.1 Dresser le tableau à double entrée des 36 sommes possibles (les deux dés sont distinguables), dénombrer les issues qui réalisent E et montrer que $P(E) = \frac{1}{6}$; en donner la valeur décimale arrondie au millièmes.

Partie B — la simulation

Le programme ci-contre simule n lancers de deux dés et doit renvoyer la **fréquence** de l'événement E au cours de ces n lancers. L'instruction `randint(1, 6)` renvoie un entier au hasard entre 1 et 6, chacun ayant la même probabilité d'être choisi.

- 4.2 Recopier et compléter les deux lignes en pointillés.
- 4.3 Que vaut `succes` après l'exécution de `frequence(1)` si les deux dés donnent 3 et 4 ?
- 4.4 Le résultat de `frequence(200)` est-il le même à chaque exécution du programme ? Expliquer.

```
1 from random import randint
2
3 def frequence(n):
4     succes = 0
5     for i in range(n):
6         de1 = randint(1, 6)
7         de2 = randint(1, 6)
8         if de1 + de2 == ..... :
9             succes = succes + 1
10    return .....
```

Programme 1 — Fréquence de la somme 7 sur n lancers

Partie C — ce que l'on observe

n	50	200	1 000	10 000	100 000
fréquence	0,140	0,160	0,171	0,164 3	0,166 8

- 4.5 Le tableau ci-dessus donne les résultats d'une exécution du programme. Comparer chaque fréquence à $P(E)$: laquelle en est la plus proche ?
- 4.6 Sur la figure 1, lire la fréquence obtenue après 100 lancers, puis après 200 lancers. À partir de quel nombre de lancers, environ, la courbe reste-t-elle comprise entre 0,15 et 0,18 ?
- 4.7 Compléter : « lorsque le nombre de lancers augmente, la fréquence observée de E se rapproche de ... ». Comment s'appelle cette propriété ?

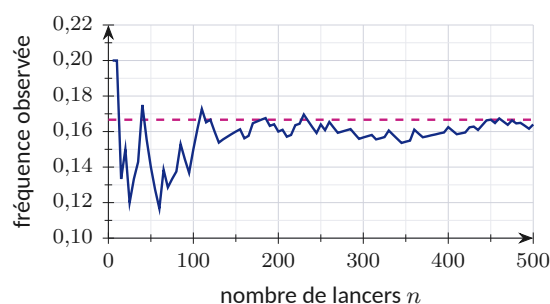


Figure 1 — Fréquence de E au fil des lancers ; en pointillé, $y = \frac{1}{6}$