

Fiche de cours

Nombres réels, intervalles et valeur absolue

L'essentiel du chapitre en deux pages

définitions · propriétés · méthodes · à savoir par cœur

1 LES ENSEMBLES DE NOMBRES

Définition. Un **entier naturel** est un entier positif ou nul ($\mathbb{N}$); un **entier relatif** est un entier de signe quelconque ($\mathbb{Z}$). Un nombre **décimal** est un nombre qui s'écrit $\frac{a}{10^n}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$ ($\mathbb{D}$); un nombre **rationnel** est un nombre qui s'écrit $\frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{Z}^*$ ($\mathbb{Q}$). Les nombres **réels** sont les abscisses des points d'une droite graduée ($\mathbb{R}$). Un réel qui n'est pas rationnel est dit **irrationnel** : $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, π .

Propriété. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Un décimal a une écriture décimale *finie*; un rationnel non décimal a une écriture décimale *périodique* à partir d'un certain rang, comme $\frac{1}{3} = 0,333\dots$

Notation. $x \in E$ (« x appartient à E »), $x \notin E$, $E \subset F$ (« E est inclus dans F »). L'**ensemble vide** $\emptyset$ est l'ensemble qui n'a aucun élément. Pour un ensemble fini E , $\text{Card } E$ est son nombre d'éléments : $\text{Card} \{-3; 0; \sqrt{2}\} = 3$. Le **produit cartésien** $E \times F$ est l'ensemble des couples $(x; y)$ où $x \in E$ et $y \in F$; ainsi $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ est l'ensemble des couples de coordonnées du plan.

Propriété — deux résultats à savoir démontrer. $\frac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal : si $\frac{1}{3} = \frac{a}{10^n}$ ($a \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$), alors $10^n = 3a$ serait un multiple de 3, ce qui est faux car la somme des chiffres de $10^n = 10\dots0$ vaut 1. $\sqrt{2}$ est irrationnel : si $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, fraction irréductible d'entiers naturels non nuls, alors $p^2 = 2q^2$ est pair, donc p est pair (le carré d'un impair est impair); avec $p = 2k$, il vient $q^2 = 2k^2$, donc q est pair aussi : absurde.

2 INTERVALLES DE $\mathbb{R}$

Définition. Un **intervalle** est l'ensemble des réels compris entre deux bornes. Les bornes sont écrites séparées d'un point-virgule; le crochet est tourné vers la borne quand elle appartient à l'intervalle.

Intervalle	Inégalités ($a < b$)	Intervalle	Inégalités
$[a; b]$	$a \leq x \leq b$	$[a; +\infty[$	$x \geq a$
$]a; b[$	$a < x < b$	$]a; +\infty[$	$x > a$
$[a; b[$	$a \leq x < b$	$] -\infty; b]$	$x \leq b$
$]a; b]$	$a < x \leq b$	$] -\infty; b[$	$x < b$

Remarque. Une borne infinie est *toujours* ouverte, et $\mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$. L'intervalle $[a; a]$ se réduit à $\{a\}$.

Propriété. L'**intersection** $I \cap J$ est l'ensemble des réels appartenant à I et à J : c'est un intervalle, éventuellement $\emptyset$. La **réunion** $I \cup J$ est l'ensemble des réels appartenant à I ou à J : ce n'est un intervalle que si I et J se chevauchent ou se touchent.

Méthode — déterminer $I \cap J$ ou $I \cup J$. placer les quatre bornes sur une droite graduée, hachurer I puis J , et lire la zone commune (intersection) ou la zone totale (réunion), en soignant les crochets.

3 VALEUR ABSOLUE ET DISTANCE

Définition. La **valeur absolue** d'un réel a est $|a| = a$ si $a \geq 0$ et $|a| = -a$ si $a < 0$. C'est la **distance** de a à 0.

Propriété. Pour tous réels a et b : $|a| \geq 0$; $|a| = 0 \iff a = 0$; $|-a| = |a|$; $|ab| = |a| \times |b|$; $\sqrt{a^2} = |a|$; la distance entre a et b vaut $|a - b| = |b - a|$.

Propriété — intervalle de centre a et de rayon r . Pour $r \geq 0$:

$$|x - a| \leq r \iff a - r \leq x \leq a + r \iff x \in [a - r; a + r].$$

De même $|x - a| = r \iff x = a - r$ ou $x = a + r$, et $|x - a| \geq r$ donne $x \leq a - r$ ou $x \geq a + r$: la réunion de deux intervalles.

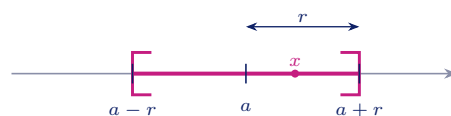


Figure 1 — $|x - a| \leq r$ signifie « x est à une distance au plus r de a ».

4 ENCADRER, ARRONDIR, ÉCRIRE UN ORDRE DE GRANDEUR

Définition. Encadrer un réel x , c'est écrire $a \leq x \leq b$; le nombre $b - a$ est l'**amplitude** de l'encadrement. Un encadrement à 10^{-n} est un encadrement d'amplitude 10^{-n} par deux décimaux, comme $1,41 \leq \sqrt{2} \leq 1,42$.

Propriété — compatibilité avec les opérations. Si $a \leq x \leq b$ et $c \leq y \leq d$, alors $a + c \leq x + y \leq b + d$. Si de plus $a \geq 0$ et $c \geq 0$, alors $ac \leq xy \leq bd$. Attention : on ne soustrait pas deux encadrements membre à membre (pour $x - y$, on ajoute $-d \leq -y \leq -c$) et on ne multiplie pas sans précaution des encadrements de nombres négatifs.

Définition. La **troncature** à 10^{-n} de $x > 0$ s'obtient en coupant l'écriture décimale après le n -ième chiffre après la virgule; l'**arrondi** à 10^{-n} est le plus proche de x des deux décimaux encadrants. L'**écriture scientifique** d'un réel non nul est $a \times 10^p$ avec $1 \leq |a| < 10$ et $p \in \mathbb{Z}$; pour $a > 0$, l'**ordre de grandeur** est, par convention, 10^p si $a < 5$ et 10^{p+1} si $a \geq 5$; celui de $6,4 \times 10^{-3}$ est 10^{-2} .

Définition. Les **chiffres significatifs** d'un décimal sont ses chiffres à partir du premier non nul (lu de gauche à droite) : 0,073 62 en a quatre, 4,70 en a trois. Arrondis : $0,073\,62 \approx 0,074$ (deux chiffres significatifs), $3\,849 \approx 3,85 \times 10^3$ (trois). Une valeur encadrée peut s'annoncer avec n chiffres significatifs si toutes les valeurs de l'encadrement ont le même arrondi à n chiffres significatifs.

Méthode — encadrer $\sqrt{2}$ par balayage. on teste $1,0^2, 1,1^2, \dots, 1,5^2$: comme $1,4^2 = 1,96 < 2 < 2,25 = 1,5^2$, on a $1,4 < \sqrt{2} < 1,5$. On recommence au pas suivant (10^{-2} , puis 10^{-3}) pour gagner un chiffre à chaque étape.

5 SAVOIR-FAIRE DU CHAPITRE

► SAVOIR-FAIRE

- Reconnaître à quels ensembles $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{D}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ appartient un nombre, et donner le plus petit d'entre eux qui le contient.
- Démontrer que $\frac{1}{3}$ n'est pas décimal, que $\sqrt{2}$ est irrationnel.
- Passer d'une inégalité à un intervalle et à la droite graduée; déterminer une intersection, une réunion.
- Calculer une valeur absolue, une distance; résoudre $|x| = k$, $|x| < k$, $|x - a| \leq r$ et donner la réponse en intervalles.
- Encadrer une somme, un produit; tronquer, arrondir (à 10^{-n} , à n chiffres significatifs).

6 EXEMPLES TYPES

★ EXEMPLE — plus petit ensemble

$A = (1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2}) = 1 - 2 = -1$: bien qu'écrit avec des racines, A est un entier relatif, donc $A \in \mathbb{Z}$ (et $A \notin \mathbb{N}$). En revanche $\frac{5}{6} \in \mathbb{Q}$ mais $\frac{5}{6} \notin \mathbb{D}$: sinon $\frac{5}{6} = \frac{a}{10^n}$ et $5 \times 10^n = 6a$ serait multiple de 3, or la somme de ses chiffres vaut 5.

★ EXEMPLE — intersection et réunion

Avec $I =]-3; 4]$ et $J = [1; 7[$: $I \cap J = [1; 4]$ et $I \cup J =]-3; 7[$. Avec $I' =]-3; 1[$ et $J' = [1; 7[$: $I' \cap J' = \emptyset$ (le réel 1 n'est pas dans I') tandis que $I' \cup J' =]-3; 7[$.

★ EXEMPLE — équation et inéquation avec une valeur absolue

$|x - 5| = 2$ signifie « x est à la distance 2 de 5 » : $x = 3$ ou $x = 7$, donc $S = \{3; 7\}$. $|2 - x| < 3$ s'écrit $|x - 2| < 3$, donc $-1 < x < 5$ et $S =]-1; 5[$. Enfin $|x| \geq 4$ donne $S =]-\infty; -4] \cup [4; +\infty[$.

★ EXEMPLE — encadrement et arrondi

On sait que $3,14 < \pi < 3,15$ et $1,73 < \sqrt{3} < 1,74$. Alors $3,14 + 1,73 < \pi + \sqrt{3} < 3,15 + 1,74$, soit $4,87 < \pi + \sqrt{3} < 4,89$; et comme les bornes sont positives, $5,4322 < \pi\sqrt{3} < 5,4810$. L'arrondi de $\pi\sqrt{3}$ à l'unité est donc 5; pour son arrondi au dixième, il faudrait des encadrements plus précis.

✗ PIÈGES

- $|a|$ n'est pas « a sans le signe $-$ » : $|x - 3|$ vaut $x - 3$ si $x \geq 3$, mais $3 - x$ si $x < 3$.
- $\sqrt{a^2} = |a|$ et non a : pour $a = -5$, $\sqrt{(-5)^2} = 5$.
- Un nombre écrit avec une racine n'est pas forcément irrationnel ($\sqrt{49} = 7$); la calculatrice n'affiche que des arrondis.
- Ne pas confondre troncature et arrondi : la troncature de 2,718 au centième est 2,71, son arrondi est 2,72.