

Exercices 1

Nombres réels, intervalles et valeur absolue

Les bases : ensembles de nombres, intervalles, valeur absolue, encadrements

7 exercices · niveau ●○○ · durée conseillée : 1 h 30 · sans calculatrice

★ À RETENIR — Ce qu'il faut savoir faire à la fin de la feuille

- Situer un nombre dans $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{D}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ et donner le plus petit de ces ensembles qui le contient.
- Passer d'une inégalité à un intervalle et à la droite graduée ; déterminer une réunion, une intersection.
- Calculer une valeur absolue, une distance, et résoudre $|x| = k, |x| < k, |x - a| \leq r$.
- Encadrer une somme, un produit ; donner une troncature, un arrondi, des chiffres significatifs.

■ RAPPEL — Le formulaire du chapitre

- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$; un *décimal* s'écrit $\frac{a}{10^n}$, un *rationnel* $\frac{p}{q}$; un réel non rationnel est *irrationnel*.
- $|a| = a$ si $a \geq 0$, $|a| = -a$ si $a < 0$; $|a|$ est la distance de a à 0, $|a - b|$ celle entre a et b ; $\sqrt{a^2} = |a|$.
- Pour $r \geq 0$: $|x - a| \leq r \iff a - r \leq x \leq a + r \iff x \in [a - r ; a + r]$ (*centre a , rayon r*).
- Si $a \leq x \leq b$ et $c \leq y \leq d$ alors $a + c \leq x + y \leq b + d$; si de plus $a \geq 0$ et $c \geq 0$ alors $ac \leq xy \leq bd$.

Exercice 1 Ensembles de nombres et écriture décimale

●○○

- 1.1** Pour chaque nombre, donner le **plus petit** des ensembles $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{D}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ auquel il appartient, en justifiant par son écriture simplifiée.

a) $\frac{18}{3}$

b) $-\frac{7}{4}$

c) $\frac{5}{6}$

d) $\sqrt{49}$

e) $\sqrt{5}$

f) $\frac{9}{3} - 5$

g) $\frac{22}{7}$

h) $(1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2})$

- 1.2** Donner l'écriture décimale exacte de $\frac{3}{8}$, $\frac{7}{20}$ et $\frac{11}{25}$.

- 1.3** En posant la division, donner les six premiers chiffres après la virgule de $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{11}$ et $\frac{7}{30}$. Sont-ils décimaux ?

Exercice 2 Des inégalités aux intervalles

●○○

- 2.1** Traduire chaque condition sur le réel x par un intervalle.

a) $-4 \leq x < 1$

b) $x > -2$

c) $x \leq 3$

d) $0 < x \leq 7$

- 2.2** Traduire chaque appartenance par un encadrement ou une inégalité.

a) $x \in]-\infty ; 2]$

b) $x \in [-5 ; -1[$

c) $x \in]3 ; +\infty[$

d) $x \in [0 ; 1]$

- 2.3** Donner l'intervalle représenté en couleur sur chacune des quatre droites graduées de la figure 1.

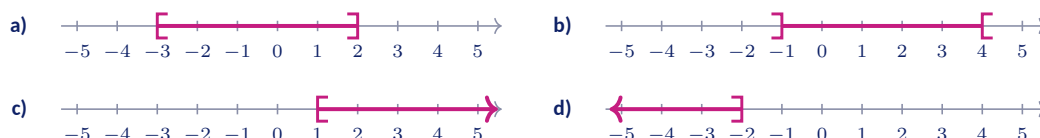


Figure 1 — Quatre intervalles représentés sur une droite graduée

Exercice 3 Réunion et intersection

Déterminer chaque ensemble et l'écrire sous forme d'intervalle lorsque c'est possible.

- a) $[-3; 5] \cap [1; 8]$ b) $[-3; 5] \cup [1; 8]$ c) $] -\infty; 2[\cap [-1; +\infty[$
 d) $] -\infty; 2[\cup [-1; +\infty[$ e) $[0; 3[\cap]4; 7]$ f) $] -5; 1] \cap]1; 6]$
 g) $] -2; 3] \cup]3; 7]$ h) $[-6; 0] \cup]-1; +\infty[$

Exercice 4 Valeurs absolues et distances

4.1 Calculer sans calculatrice.

- a) $|-7|$ b) $|3 - 10|$ c) $|-2| \times |-5|$ d) $\sqrt{(-6)^2}$
 e) $|\sqrt{2} - 2|$ f) $|\pi - 4|$ g) $\left| -\frac{3}{4} \right| + \left| \frac{1}{4} \right|$ h) $|5 - |-3||$

4.2 Calculer la distance entre -3 et 5 , entre -7 et -2 , puis entre $\frac{1}{2}$ et $\frac{7}{2}$.

4.3 Écrire à l'aide d'une valeur absolue : « la distance entre x et 4 », puis « entre x et -6 ».

Exercice 5 Équations, inéquations et intervalles

5.1 Résoudre dans $\mathbb{R}$; écrire les solutions sous forme d'intervalle lorsque c'est possible.

- a) $|x| = 6$ b) $|x| = -3$ c) $|x| < 4$
 d) $|x| \geq 2$ e) $|x - 3| = 5$ f) $|x + 2| \leq 1$

5.2 Donner le centre et le rayon de $[1; 9]$, puis écrire $x \in [1; 9]$ à l'aide d'une valeur absolue. Faire de même pour $[-7; -1]$ et $]2; 8[$.

5.3 Une pièce est conforme lorsque son diamètre d , en millimètres, vérifie $|d - 12| \leq 0,1$. Traduire par un encadrement, puis par un intervalle.

Exercice 6 Troncature, arrondi, chiffres significatifs

On rappelle que $\pi = 3,141\,592\,653\dots$

6.1 Recopier et compléter le tableau ci-dessous.

Précision	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}
Troncature de π				
Arrondi de π				

6.2 En déduire un encadrement de π d'amplitude 10^{-3} par deux nombres décimaux.

6.3 Donner l'arrondi de $0,004\,508$ à deux chiffres significatifs, puis celui de $45\,678$ à trois chiffres significatifs.

Exercice 7 Encadrer une somme, un produit

Soit x et y deux réels tels que $2 \leq x \leq 2,5$ et $1,2 \leq y \leq 1,5$.

7.1 Encadrer $x + y$, puis $x - y$, puis $3x + 1$, puis $\frac{1}{x}$ (on admet que, pour des réels a et b tels que $0 < a \leq b$, on a $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$).

7.2 Un rectangle a pour dimensions x et y , en centimètres. Encadrer son périmètre, puis son aire.

7.3 Peut-on affirmer que l'aire de ce rectangle est comprise entre 2 cm^2 et 4 cm^2 ? Justifier.