

Exercices 2

Nombres réels, intervalles et valeur absolue

Application : démonstrations, tolérances, plages de fonctionnement, encadrements, algorithme de balayage

6 exercices · niveau ●●○ · durée conseillée : 2 h · sans calculatrice

★ À RETENIR — Ce qu'il faut savoir faire à la fin de la feuille

- Démontrer qu'un nombre n'est pas décimal ; reconnaître les fractions décimales.
- Traduire une tolérance, une plage ou une distance par une valeur absolue et par un intervalle.
- Encadrer une somme, un produit, et en déduire le nombre de chiffres que l'on peut annoncer.
- Encadrer $\sqrt{2}$ à la main, puis comprendre et compléter un algorithme de balayage écrit en Python.

Exercice 1 Démonstration : $\frac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal

●●○

On raisonne par l'absurde : on **suppose** qu'il existe un entier relatif a et un entier naturel n tels que $\frac{1}{3} = \frac{a}{10^n}$.

- 1.1 Montrer qu'alors $10^n = 3a$.
- 1.2 Rappeler le critère de divisibilité par 3. Quelle est la somme des chiffres de 10^n ? En déduire que 10^n n'est pas un multiple de 3.
- 1.3 Conclure. À quel ensemble $\frac{1}{3}$ appartient-il ? Le même raisonnement s'applique-t-il à $\frac{1}{7}$? à $\frac{1}{4}$?
- 1.4 Parmi les fractions $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{12}$, $\frac{7}{40}$, $\frac{2}{15}$, $\frac{9}{48}$, lesquelles sont des nombres décimaux ? Justifier en donnant, le cas échéant, l'écriture décimale.

Exercice 2 Tolérance de fabrication

●●○

Un atelier usine des axes cylindriques. Un axe est *conforme* lorsque son diamètre d , exprimé en millimètres, vérifie $|d - 12| \leq 0,1$.

- 2.1 Traduire cette condition par un encadrement de d , puis par un intervalle. Donner le centre et le rayon de cet intervalle.
- 2.2 Cinq axes ont été mesurés : 11,95 ; 12,08 ; 12,11 ; 11,89 ; 12,00. Lesquels sont conformes ? Justifier par un calcul de distance.
- 2.3 Le rayon r d'un axe conforme vérifie-t-il $|r - 6| \leq 0,05$? Le diamètre intérieur D d'une bague vérifie $24,7 \leq D \leq 25,3$: écrire cette condition avec une valeur absolue.
- 2.4 On empile deux rondelles d'épaisseurs e_1 et e_2 (en mm) telles que $3,8 \leq e_1 \leq 4,0$ et $2,9 \leq e_2 \leq 3,1$. Encadrer la hauteur de l'empilement. Peut-on garantir qu'elle est inférieure à 7,2 mm ?

Exercice 3 Plages de fonctionnement de deux capteurs

●●○

Un capteur **A** donne une mesure fiable lorsque la température T , en degrés Celsius, appartient à $[-10 ; 35]$; un capteur **B** est fiable pour $T \in [5 ; 60]$.

- 3.1 Déterminer l'ensemble des températures pour lesquelles les deux capteurs sont fiables, puis celui pour lequel au moins un des deux l'est ; les représenter sur la droite graduée ci-dessous.



- 3.2** Écrire l'appartenance $T \in [5 ; 35]$ à l'aide d'une valeur absolue.
- 3.3** Un troisième capteur **C** n'est fiable que pour $T \in]20 ; +\infty[$. Déterminer l'ensemble des températures pour lesquelles **A** et **C** sont fiables tous les deux.
- 3.4** Existe-t-il une température pour laquelle les trois capteurs sont fiables ? Si oui, donner l'intervalle correspondant. Pour quelles températures ni **A** ni **B** n'est fiable ?

Exercice 4 Sur une route rectiligne



Une route rectiligne est modélisée par une droite graduée en kilomètres. Un émetteur radio est installé au point d'abscisse 27 et un relais au point d'abscisse 42. Un véhicule se trouve au point d'abscisse x , avec $x \geq 0$.

- 4.1** Calculer la distance entre l'émetteur et le relais.
- 4.2** Le véhicule capte l'émetteur lorsqu'il en est à 10 km ou moins, et le relais lorsqu'il en est à moins de 8 km. Traduire chacune de ces deux conditions par une valeur absolue, puis par un intervalle.
- 4.3** Déterminer l'intervalle des abscisses pour lesquelles le véhicule capte les deux signaux, puis celui pour lequel il en capte au moins un.
- 4.4** En déduire les portions de route (avec $x \geq 0$) sur lesquelles le véhicule ne capte aucun signal.

Exercice 5 Mesures et chiffres significatifs



Un terrain rectangulaire est mesuré au décimètre près : la longueur annoncée est $L = 20,0$ m et la largeur $\ell = 10,0$ m, chacune à 0,1 m près. On rappelle qu'une valeur encadrée peut être annoncée avec n chiffres significatifs lorsque toutes les valeurs de l'encadrement ont le même arrondi à n chiffres significatifs.

- 5.1** Écrire les deux conditions à l'aide d'une valeur absolue, puis encadrer L et ℓ .
- 5.2** Encadrer le périmètre du terrain. Combien de chiffres significatifs peut-on annoncer pour ce périmètre ?
- 5.3** Encadrer l'aire du terrain. Peut-on l'annoncer avec trois chiffres significatifs ? Avec deux ? Justifier.
- 5.4** Un chronomètre affiche $t = 9,58$ s, à 0,005 s près. Encadrer t , puis écrire cette condition à l'aide d'une valeur absolue.

Exercice 6 Encadrer $\sqrt{2}$: à la main, puis par balayage



Partie A — à la main, sans calculatrice

- 6.1** Justifier que $1 < \sqrt{2} < 2$.
- 6.2** Calculer $1,4^2$ et $1,5^2$. En déduire un encadrement de $\sqrt{2}$ d'amplitude 10^{-1} .
- 6.3** On donne $1,41^2 = 1,9881$ et $1,42^2 = 2,0164$. En déduire un encadrement de $\sqrt{2}$ d'amplitude 10^{-2} , puis la troncature de $\sqrt{2}$ à 10^{-2} .

Partie B — avec Python

Le programme ci-contre doit renvoyer un encadrement de $\sqrt{2}$ d'amplitude 10^{-n} .

- 6.4** Justifier que, pour un entier $k \geq 0$, l'inégalité $\left(\frac{k}{10^n}\right)^2 \leq 2$ équivaut à $k^2 \leq 2 \times 10^{2n}$.
- 6.5** Recopier et compléter les deux lignes en pointillés.
- 6.6** Que renvoient `encadrement(0)` et `encadrement(1)` ? Justifier sans machine.
- 6.7** On admet $141^2 = 19\,881$ et $142^2 = 20\,164$: que renvoie `encadrement(2)` ?

```

1  def encadrement(n):
2      k = 0
3      while (k + 1) ** 2 <= ..... :
4          k = .....
5      a = k / 10 ** n
6      b = (k + 1) / 10 ** n
7      return a, b

```

Programme 1 — Encadrement de $\sqrt{2}$ par balayage