

Approfondissement

Nombres réels, intervalles et valeur absolue

Pour aller plus loin : fractions décimales, développements périodiques, irrationnels, inégalité triangulaire, dichotomie

6 exercices · niveau ●●● · durée conseillée : 2 h 30 · sans calculatrice

Exercice 1 Quelles fractions sont décimales ? ●●●

Dans tout l'exercice, $\frac{a}{b}$ désigne une fraction **irréductible**, avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$.

- 1.1** Écrire $\frac{3}{40}$ sous la forme $\frac{c}{10^n}$; en déduire son écriture décimale. Faire de même pour $\frac{7}{16}$ et $\frac{11}{250}$.
- 1.2** Démontrer que si $b = 2^m \times 5^p$, avec m et p entiers naturels, alors $\frac{a}{b}$ est un nombre décimal. On pourra multiplier le numérateur et le dénominateur par une puissance de 2 ou de 5 bien choisie.
- 1.3** On admet la réciproque : si $\frac{a}{b}$ est décimal, alors b ne s'écrit qu'avec des facteurs 2 et 5. Parmi les fractions suivantes, déterminer celles qui sont décimales, en donnant leur écriture décimale le cas échéant.
- a) $\frac{7}{16}$ b) $\frac{5}{12}$ c) $\frac{9}{50}$ d) $\frac{13}{75}$ e) $\frac{21}{56}$
- 1.4** Déterminer tous les entiers n compris entre 1 et 20 tels que $\frac{1}{n}$ soit un nombre décimal.
- 1.5** Le produit de deux nombres non décimaux peut-il être décimal ? Donner un exemple ou démontrer que c'est impossible.

Exercice 2 Des développements décimaux périodiques aux fractions ●●●

- 2.1** Soit x le nombre dont l'écriture décimale est $0,272\,727\ldots$ (le bloc « 27 » se répète indéfiniment). Calculer $100x - x$, puis en déduire l'écriture de x sous forme de fraction irréductible.
- 2.2** Soit $y = 0,1666\ldots$ (seul le chiffre 6 se répète). Calculer $100y - 10y$, puis écrire y sous forme de fraction irréductible.
- 2.3** Démontrer, par la même méthode, que $0,999\ldots = 1$.
- 2.4** Écrire $2,345\,45\ldots$ (le bloc « 45 » se répète) sous forme de fraction irréductible.
- 2.5** Que peut-on conclure, de façon générale, sur un nombre dont l'écriture décimale est périodique à partir d'un certain rang ?

Exercice 3 Autour des nombres irrationnels ●●●

On admet que $\sqrt{2}$ et $\sqrt{6}$ sont irrationnels, ainsi que le résultat suivant : si n^2 est un multiple de 3, alors n est un multiple de 3.

- 3.1** En reprenant la méthode utilisée pour $\sqrt{2}$, démontrer que $\sqrt{3}$ est irrationnel.
- 3.2** Soit r un nombre rationnel et x un nombre irrationnel. Démontrer que $r + x$ est irrationnel, puis que rx est irrationnel lorsque $r \neq 0$.
- 3.3** Donner deux nombres irrationnels dont la somme est rationnelle, puis deux nombres irrationnels dont le produit est rationnel. Que peut-on en conclure ?
- 3.4** Calculer $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2$. En déduire, par l'absurde, que $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ est irrationnel.

- 3.5** Soit u et v deux rationnels tels que $u < v$. Démontrer que $\frac{u+v}{2}$ est un rationnel compris strictement entre u et v . En déduire qu'entre deux rationnels distincts il existe une infinité de rationnels.

Exercice 4 L'inégalité triangulaire (hors programme — pour aller plus loin)



- 4.1** Démontrer que, pour tout réel x , $-|x| \leq x \leq |x|$.
- 4.2** En déduire l'inégalité triangulaire : pour tous réels a et b , $|a+b| \leq |a| + |b|$.
- 4.3** Vérifier cette inégalité pour $a = -3$ et $b = 7$, puis pour $a = -3$ et $b = -7$. Dans quel cas y a-t-il égalité ? Formuler une conjecture et la justifier.
- 4.4** En appliquant l'inégalité triangulaire à $a = (a-b) + b$, démontrer que $|a| - |b| \leq |a-b|$ pour tous réels a et b .
- 4.5** Une pièce a une longueur L telle que $|L - 50| \leq 0,2$ et une autre une longueur M telle que $|M - 30| \leq 0,3$ (en millimètres). Majorer $|(L+M) - 80|$, puis $|(L-M) - 20|$.

Exercice 5 Équations et inéquations avec plusieurs valeurs absolues



- 5.1** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $|x-1| = |x+3|$, d'abord en interprétant les deux membres comme des distances, puis par le calcul.
- 5.2** Résoudre de même l'inéquation $|x-1| < |x+3|$.
- 5.3** On cherche à résoudre l'équation $|x-2| + |x+1| = 5$. Recopier et compléter le tableau ci-dessous donnant, selon la valeur de x , les expressions de $|x-2|$ et de $|x+1|$ sans valeur absolue, puis résoudre l'équation sur chacun des trois intervalles.

Si x appartient à	$]-\infty; -1[$	$[-1; 2]$	$]2; +\infty[$
$ x-2 $ est égal à			
$ x+1 $ est égal à			

- 5.4** Interpréter le résultat de la question 5.3 en termes de distances sur une droite graduée.
- 5.5** Résoudre, par la même méthode, l'équation $|x-2| + |x+1| = 3$, puis l'inéquation $|x-2| + |x+1| \leq 3$.

Exercice 6 Balayage ou dichotomie ?



Le programme ci-contre encadre $\sqrt{2}$ par *dichotomie* : à chaque étape, on coupe l'intervalle en deux et on ne garde que la moitié qui contient $\sqrt{2}$.

- 6.1** Justifier qu'à chaque étape on a bien $a \leq \sqrt{2} \leq b$.
- 6.2** Écrire les valeurs de a et de b après chacune des quatre premières étapes de la boucle.
- 6.3** Quelle est l'amplitude de l'intervalle $[a; b]$ après k étapes ? Combien d'étapes faut-il pour obtenir une amplitude strictement inférieure à 10^{-2} ?
- 6.4** Un balayage de pas 10^{-2} à partir de 1 demande environ 42 étapes pour la même précision. Commenter.
- 6.5** Que faut-il modifier dans le programme pour encadrer $\sqrt{5}$? Quelles valeurs initiales de a et b peut-on choisir ?

```

1 def dichotomie(p):
2     a = 1
3     b = 2
4     while b - a > p:
5         m = (a + b) / 2
6         if m * m <= 2:
7             a = m
8         else:
9             b = m
10    return a, b

```

Programme 1 — Encadrement de $\sqrt{2}$ par dichotomie