

SECONDE · MATHÉMATIQUES · CHAPITRE 8

# Fiche de cours Fonctions de référence

L'essentiel du chapitre en deux pages

définitions · propriétés · méthodes · à savoir par cœur



R. RINGUET · 2026 - 2027

## 1 FONCTIONS AFFINES

**Définition.** Une fonction  $f$  est **affine** lorsqu'il existe deux réels  $m$  et  $p$  tels que  $f(x) = mx + p$  pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$ . Sa courbe est la **droite** d'équation  $y = mx + p$  :  $m$  est le **coefficient directeur**,  $p$  l'**ordonnée à l'origine**. Si  $p = 0$ ,  $f$  est **linéaire**; si  $m = 0$ ,  $f$  est **constante**.

**Propriété — taux d'accroissement.** Pour tous réels  $a \neq b$ ,  $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = m$  : ce nombre ne dépend pas de  $a$  ni de  $b$ . On en déduit  $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$  pour deux points  $A$  et  $B$  de la droite.

**Propriété.** Si  $m > 0$ ,  $f$  est croissante sur  $\mathbb{R}$ ; si  $m < 0$ ,  $f$  est décroissante sur  $\mathbb{R}$ ; si  $m = 0$ ,  $f$  est constante. Pour  $m \neq 0$ ,  $f(x) = 0$  pour  $x = -\frac{p}{m}$  et  $f(x)$  change de signe en cette valeur (tableau de signes).

## 2 LES FONCTIONS CARRÉ, INVERSE, RACINE CARRÉE ET CUBE

| Fonction                | Définie sur    | Sens de variation et signe                                                                     |
|-------------------------|----------------|------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $x \mapsto x^2$         | $\mathbb{R}$   | décroissante sur $]-\infty; 0]$ , croissante sur $[0; +\infty[$ ; minimum 0 en 0; $x^2 \geq 0$ |
| $x \mapsto \frac{1}{x}$ | $\mathbb{R}^*$ | décroissante sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$ ; $\frac{1}{x}$ est du signe de $x$      |
| $x \mapsto \sqrt{x}$    | $[0; +\infty[$ | croissante sur $[0; +\infty[$ ; minimum 0 en 0; $\sqrt{x} \geq 0$                              |
| $x \mapsto x^3$         | $\mathbb{R}$   | croissante sur $\mathbb{R}$ ; $x^3$ est du signe de $x$                                        |

**Notation.** La courbe de la fonction carré est une **parabole** de sommet l'origine; celle de la fonction inverse est une **hyperbole** formée de deux branches.

**Remarque.** La fonction inverse n'est pas décroissante sur  $\mathbb{R}^*$  : la propriété n'a de sens que sur un **intervalle**. Ainsi  $-1 < 2$  et pourtant  $\frac{1}{-1} = -1 < \frac{1}{2}$ .

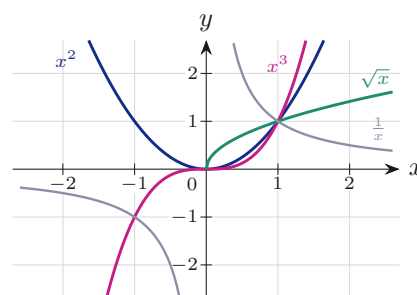


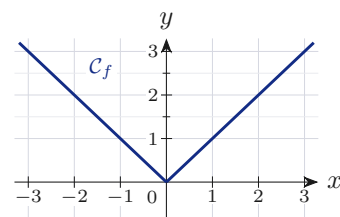
Figure 1 — Les quatre courbes de référence.

## 3 LA FONCTION VALEUR ABSOLUE

**Définition.** La **valeur absolue** d'un réel  $a$  est  $|a| = a$  si  $a \geq 0$  et  $|a| = -a$  si  $a < 0$  : c'est la **distance de  $a$  à 0**. Plus généralement,  $|a - b|$  est la distance entre  $a$  et  $b$ .

**Propriété.** Pour tout réel  $x$  :  $|x| \geq 0$ ,  $|x| = 0 \iff x = 0$ ,  $|-x| = |x|$  et  $\sqrt{x^2} = |x|$ .

**Propriété.** La fonction valeur absolue est définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = |x|$ . Elle est décroissante sur  $]-\infty; 0]$ , croissante sur  $[0; +\infty[$ , et son minimum est 0, atteint en 0 : elle varie donc comme la fonction carré. Sa courbe est formée des **deux demi-droites** d'origine  $O$  portées par les droites d'équations  $y = -x$  (pour  $x \leq 0$ ) et  $y = x$  (pour  $x \geq 0$ ).

Figure 2 — La courbe de  $x \mapsto |x|$ .

## 4 ÉQUATIONS ET INÉQUATIONS

**Propriété.** Soit  $k$  un réel et  $r$  un réel strictement positif.

### ■ FORMULAIRE

- $|x| = k$  : si  $k > 0$ , deux solutions  $-k$  et  $k$ ; si  $k = 0$ , une solution 0; si  $k < 0$ , aucune solution.
- $|x| \leq k$  (avec  $k \geq 0$ )  $\iff x \in [-k; k]$ ;  $|x| > k$  (avec  $k \geq 0$ )  $\iff x \in ]-\infty; -k[ \cup ]k; +\infty[$ .

- $|x - a| \leq r \iff x \in [a - r; a + r]$  : les réels à une distance au plus  $r$  de  $a$ .
- $x^2 = k$  : si  $k > 0$ , deux solutions  $-\sqrt{k}$  et  $\sqrt{k}$ ; si  $k = 0$ , une seule, 0; si  $k < 0$ , aucune.  $x^2 \leq k$  (avec  $k \geq 0$ )  $\iff x \in [-\sqrt{k}; \sqrt{k}]$ .  $x^3 = k$  : une seule solution, pour tout réel  $k$ .

**Méthode — encadrer une image.** Pour encadrer  $f(x)$  sachant  $a \leq x \leq b$ , on utilise le **sens de variation** de  $f$  sur  $[a; b]$  : si  $f$  est croissante,  $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$ ; si  $f$  est décroissante,  $f(b) \leq f(x) \leq f(a)$ . Si  $f$  change de sens sur  $[a; b]$ , on découpe l'intervalle.

## 5 COMPARER $x$ , $x^2$ ET $x^3$

**Propriété.** Pour tout  $x > 0$ , le signe de  $x^2 - x = x(x - 1)$  et celui de  $x^3 - x^2 = x^2(x - 1)$  sont ceux de  $x - 1$ . On en déduit :

$$\text{si } 0 < x < 1 : x^3 < x^2 < x; \quad \text{si } x > 1 : x < x^2 < x^3; \quad \text{si } x = 0 \text{ ou } x = 1 : x = x^2 = x^3.$$

Sur  $[0; +\infty[$ , les trois courbes se coupent donc aux points  $O(0; 0)$  et  $A(1; 1)$ , et nulle part ailleurs.

**Méthode — position relative de deux courbes.** Pour comparer les courbes d'équations  $y = A(x)$  et  $y = B(x)$ , on étudie le **signe** de  $A(x) - B(x)$  : là où il est positif, la première courbe est au-dessus de la seconde.

## 6 SAVOIR-FAIRE DU CHAPITRE

### ► SAVOIR-FAIRE

- Reconnaître une fonction affine, calculer son coefficient directeur par un taux d'accroissement, donner son sens de variation et son tableau de signes.
- Donner de mémoire l'ensemble de définition, les variations, le signe et l'allure de la courbe des fonctions carré, inverse, racine carrée, cube et valeur absolue.
- Résoudre, graphiquement et par le calcul,  $|x| = k$ ,  $|x| < k$ ,  $|x| \geq k$ ,  $|x - a| \leq r$ , ainsi que  $x^2 = k$  et  $x^2 \leq k$ .
- Comparer deux images sans les calculer et encadrer  $f(x)$  à l'aide du sens de variation.
- Comparer  $x$ ,  $x^2$  et  $x^3$  selon la position de  $x$  par rapport à 1, et déterminer la position relative de deux courbes par le signe d'une différence.

## 7 EXEMPLES TYPES

### ★ EXEMPLE — inéquation avec une valeur absolue

Résoudre  $|x - 4| < 3$ . Les solutions sont les réels dont la distance à 4 est strictement inférieure à 3, c'est-à-dire  $4 - 3 < x < 4 + 3 : S = ]1; 7[$ .

### ★ EXEMPLE — encadrement par le sens de variation

On suppose  $-1 \leq x \leq 3$  et on veut encadrer  $x^2$ . La fonction carré n'est pas monotone sur  $[-1; 3]$  : son minimum est 0 (atteint en 0) et son maximum est  $\max(1; 9) = 9$  (atteint en 3). Donc  $0 \leq x^2 \leq 9$ . Écrire «  $1 \leq x^2 \leq 9$  » serait faux.

### ★ EXEMPLE — fonction affine déterminée par deux points

La droite passant par  $A(-2; 7)$  et  $B(3; -3)$  a pour coefficient directeur  $m = \frac{-3 - 7}{3 - (-2)} = \frac{-10}{5} = -2$ . Avec  $f(x) = -2x + p$  et  $f(3) = -3$ , on obtient  $p = 3 : f(x) = -2x + 3$ , décroissante sur  $\mathbb{R}$ , positive pour  $x \leq 1,5$ .

### ✖ PIÈGES

- $|x| = k$  n'a pas toujours deux solutions : il n'y en a aucune si  $k < 0$ , et une seule si  $k = 0$ .
- $\sqrt{x^2} = |x|$ , et non  $x$  : pour  $x = -5$ ,  $\sqrt{(-5)^2} = 5$ .
- La fonction inverse est décroissante sur *chacun* des intervalles  $]-\infty; 0[$  et  $]0; +\infty[$ , jamais sur leur réunion.
- Pour encadrer  $f(x)$ , ne pas écrire  $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$  sans vérifier que  $f$  est croissante sur  $[a; b]$ .
- $x^2 < x$  est faux en général : cela ne vaut que pour  $0 < x < 1$ . De même  $\sqrt{x} > x$  seulement pour  $0 < x < 1$ .